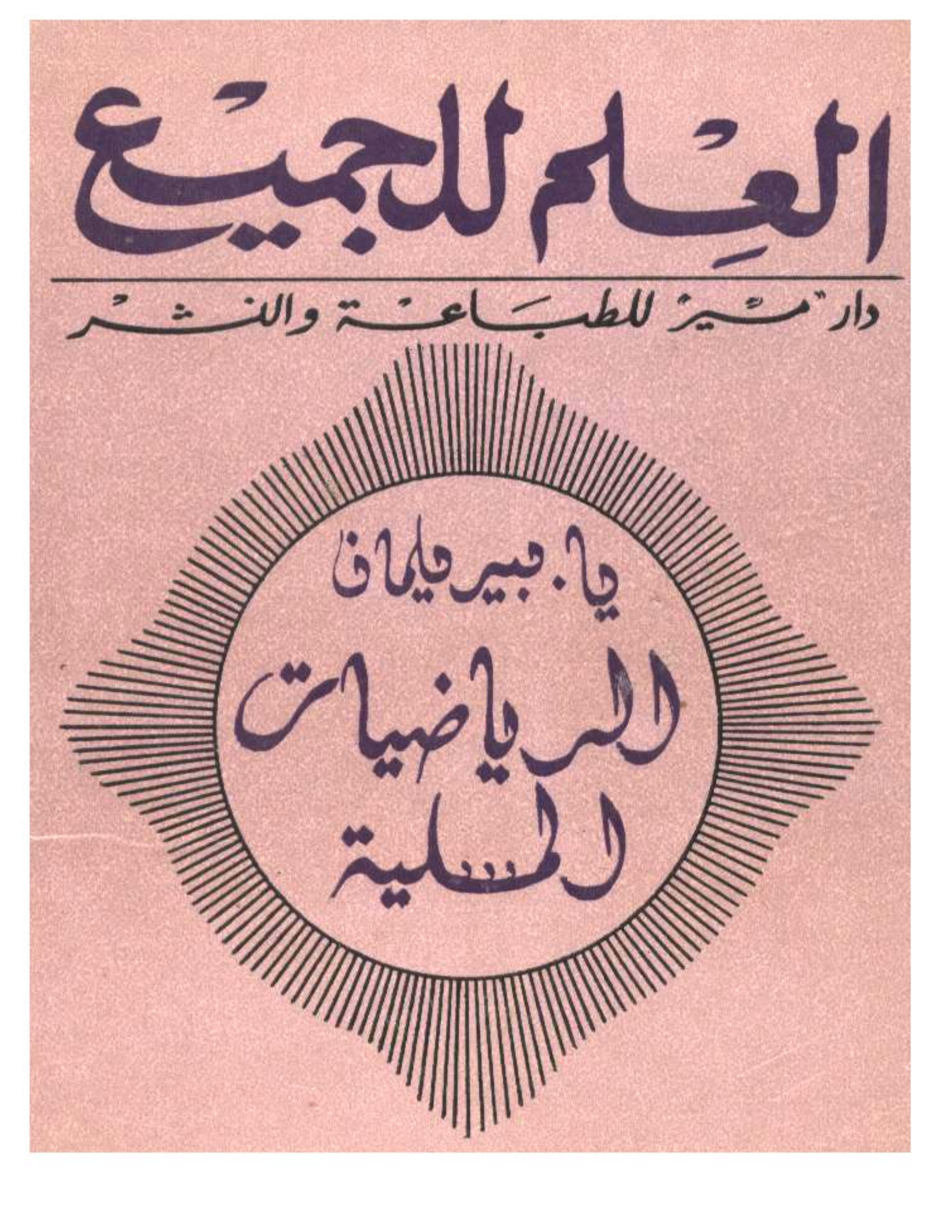

العلم للجميع
دار "مير" للطباعة والنشر
يا. بيريلمان
الرياضيات المسلية

ياكوف بيريلمان

الرياضيات المسلية
حكايات والغاز رياضية

ترجمة
الدكتور ابراهيم محمود شوشة

دار «مير» للطباعة والنشر
موسكو — الاتحاد السوفييتي

الباب الاول

افطـــار مـــع الغـــاز

١ ــ السنجاب فى المرج . حكى احد الجالسين حول مائدة الافطار فى بيت الراحة فقال لعبت صباح اليوم لعبة «استغمامية» مع السنجاب . اتعلمون انه يوجد فى غابتنا مرج دائرى تنتصب فى وسطه شجرة بتولا وحيدة ؟ وكان السنجاب يختفى عنى وراء هذه الشجرة . وعند خروجى من الغابة الى الفسحة لاحظت فورا وجه السنجاب ، بعينيه الحيتين ، يتطلع الى من خلف الجذع . وبحذر ، وبدون ان اقترب ، مشيت على طرف الحقل لكى انظر الى هذا الحيوان . درت حول الشجرة اربع مرات ولكن السنجاب كان يتراجع حول الجذع في الاتجاه العكسى بحيث اننى كنت أرى وجهه فقط . وهكذا لم استطع ان أدور حول السنجاب .

علق احدهم : ولكن انت تقول انك قد درت حول الشجرة اربع مرات .

ــ حول الشجرة وليس حول السنجاب !

ــ ولكن ، أليس السنجاب فوق الشجرة ؟

ــ وماذا فى ذلك ؟

ــ انك ايضا درت حول السنجاب .

ــ كيف اكون قد درت حول السنجات وانا لم أر ظهره ولا مرة واحدة .

ــ ما لنا وما للظهر ؟ لقد كان السنجاب في المركز ، وانت تسير فى دائرة ، هذا يعنى انك كنت تسير حول السنجاب .

ــ هذا لا يعنى ذلك ابدا . فلتتخيل اننى اسير حولك فى دائرة ، وانت تدور بحيث يكون وجهك مواجها لى طول الوقت مخفيا بذلك ظهرك . هل تقول اننى ادور حولك فى هذه الحالة ؟

ــ طبعا اقول انك تدور حولى ، وكيف يمكن غير ذلك ؟

ــ أدور على الرغم من اننى لا اصبح خلفك ولا أرى ظهرك ؟

ــ وماذا يعنى الظهر ! لقد اغلقت حولى الطريق ــ هنا جوهر المسألة ، وليس فى ان ترى ظهرى .

وسأل احد المحاورين شيخا جالسا وراء المنضدة :

ــ فلتسمح لى : ماذا يعنى الدوران حول شيء ما ؟ اعتقد انه يعنى شيئا واحدا : ان تقف دوما فى اماكن بحيث ترى الشيء من جميع الاتجاهات . اليس ذلك صحيحا يابروفيسور ؟

فأجاب العالم :

ــ الاختلاف عندكم يكمن أساسا فى الكلمات ، وفى مثل هذه الحالات يلزم البدء دائما من الشيء الذى تحدثتم عنه الآن

فقط ، وهو الاتفاق على معنى الكلمات . كيف يمكن فهم كلمات « التحرك حول شيء ما »؟ يمكن ان يكون معنى هذه الكلمات ثنائيا . يمكن اولا : ان يفترض بهذه الكلمات التحرك فى خط مقفل ويوجد الشيء داخله . وهذا احد المفاهيم . اما المفهوم الآخر فهو : التحرك بالنسبة لهذا الشيء بحيث يمكن رؤيته من جميع الجهات . لو اخذنا المفهوم الاول فلا بد وان تعترف بانك قد درت اربع مرات حول السنجاب . ولكن لو اخذنا المفهوم الثانى فلا بد وان تقول انك لم تدر حول السنجاب ولا مرة واحدة . وكما ترون فانه لا توجد هنا اسباب للمناقشة اذا تكلم الطرفان بلغة واحدة وفهما الكلمات بطريقة واحدة .

— حسنا جدا ، ممكن ان نسمح بمفهومين . ولكن اى منهما الاصح ؟

— لا تجب صياغة السؤال هكذا . يمكن الاتفاق على اى شيء . ولكن من الافضل السؤال ، ما الذى يتفق مع المفهوم المعترف به عموما . ولقلت ان المفهوم الاول يرتبط اكثر بروح اللغة ، وسأقول لكم لماذا . فالشمس كما هو معروف تدور دورة كاملة حول محورها فى زمن يزيد على ٢٥ يوما بقليل .

— الشمس تدور ؟

— طبعا ، كالارض تدور حول محورها . ولكن تصور ان دوران الشمس يتم ابطأ ، وبالذات انها تكمل دورة لا فى ٢٥ يوما

ولكن فى $\frac{1}{4}$ ٣٦٥ يوم ، اى فى عام . عندئذ لكانت الشمس تواجه الارض دائما من جانب واحد ، اما الجانب الثانى لها اى « ظهر الشمس » فما كنا لنستطيع ان نراه . ولكن هل يمكن ان يقول احد اعتمادا على هذا ان الارض لا تدور حول الشمس ؟

— نعم ، الآن غدا مفهوما اننى قد درت حول السنجاب .

وقال احد المستمعين للمناقشة :

— لدى اقتراح ايها الرفاق ! لا تتفرقوا . بما انه لن يخرج احد للنزهة فى المطر ولن ينتهى المطر قريبا ، فلنقضى الوقت هنا مع الالغاز . لقد وضعت البداية . فليؤلف كل حسب دوره او يتذكر احد الالغاز . وانت ايها البروفيسور ستكون كبير محكمينا .

وقالت امرأة شابة :

— اذا كانت الالغاز مع الجبر او الهندسة فانى لن اشترك .

اضاف احدهم :

— وانا ايضا .

— لا ، لا ، لابد وان يشترك الجميع ! وسنرجو الموجودين الا يستعملوا الجبر او الهندسة ماعدا المبادئ البسيطة جدا . لا اعتراض من احد ؟

— فى هذه الحالة انا موافقة ومستعدة ان أكون الاولى فى تقديم لغز .

قال المجتمعون من كل اتجاه :



شكل ١ . تراجع السنجاب الماكر فى الاتجاه المعاكس

ـــ عظيم جدا ، تفضلى ابدئى من فضلك !

٢ ــ فى المطبخ المشترك . ولد لغزى فى ظروف شقة ريفية . فالمسألة ، كما يقال ، من الحياة اليومية . وضعت احدى الساكنات ــ وسأسميها ثريا للتسهيل ــ فى الفرن المشترك ٣ قطع من الحطب الذى تملكه ، اما الساكنة سلوى فوضعت ٥ قطع ، والساكن زيد الذى لم يكن لديه حطب ، طلب الاذن من الساكنتين بان يطبخ طعامه على النار المشتركة . ولتغطية التكاليف قام بدفع ٨ كوبيكات للجارتين . كيف يجب على الجارتين ان تتقاسما هذه الكوبيكات الثمانية ؟

اسرع احدهم فى القول :

— مناصفة ، فان زيد قد استخدم نارهم بنفس المقدار .

فاعترض آخر قائلا :

— طبعا لا ، يجب ان نأخذ فى الاعتبار كيف اشترك فى هذه النار ما وضعته المواطنتان من حطب . فمن وضع ٣ قطع ، يجب ان يأخذ ٣ كوبيكات ، ومن وضع ٥ قطع يأخذ ٥ كوبيكات . وستكون هذه قسمة حق .

اخذ الكلمة الرجل الذى بدأ اللعبة واصبح بعد الآن رئيس الاجتماع فقال :

— ايها الرفاق ، دونا لا نعلن الحلول النهائية لهذه الالغاز الآن . فلنترك كل واحد يفكر بشأنها . وليعلن لنا الحكم الاجابات اثناء العشاء . اما الآن فالكلمة للشخص التالى . دورك ايها الرفيق الكشاف .

٣ — عمل حلقات الدراسة المدرسية . قال الكشاف : — فى مدرستنا توجد ٥ حلقات دراسية : الحدادة ، والنجارة ، والتصوير ، والشطرنج ، والكورال . حلقة الحدادة تعمل يوما واليوم التالى راحة ، وحلقة النجارة تعمل يوما ويومين راحة ، اما حلقة التصوير فتعمل يوما وثلاثة ايام راحة ، وحلقة الشطرنج تعمل يوما واربعة ايام راحة ، اما حلقة الكورال فتعمل يوما وخمسة ايام راحة . وفى اول يناير اجتمعت فى المدرسة كل الحلقات الخمس ، تم ابتدأت الدراسة تبعا للنظام الموضوع فى الخطة دون الاخلال بجدول الدراسة .

والسؤال يتركز فى عدد الامسيات التى اجتمعت فيها كل الحلقات الخمس خلال الثلاثة اشهر الاولى .

سألوا الكشاف :

ــ وهل كانت السنة عادية ام كبيسة ؟

ــ عادية ، اى ان الثلاثة اشهر الاولى : يناير وفبراير ومارس يجب حسابها بـ ٩٠ يوما ؟

ــ شيء بديهى .

قال البروفيسور :

ــ فلتسمح لى ان اضيف الى لغزك لغزا ثانيا ، كم فى نفس ربع السنة كانت مثل هذه الامسيات ، التى لم تجر فيها دراسة فى اى من الحلقات الخمس .

رن صوت احدهم :

ــ آه . انى افهم ! مسألة ماكرة . لن يكون هناك بعد ذلك اى يوم تجتمع فيه الحلقات الخمس ، ولن يكون هناك اى يوم لا تجتمع فيه الحلقات . ان هذا واضح !

وسأل رئيس الاجتماع :

ــ لماذا ؟

ــ لا استطيع ان اشرح ذلك ، ولكننى احس ، انهم يريدون ان « يخفقوا » بمن يحل هذا اللغز فى خطأ .

– لكن هذا ليس بمبرر . وفي المساء سيتضح ان كان احساسكم هذا صحيحا ام لا . دورك الآن ايها الرفيق .

٤ – من اكثر ؟ . قام اثنان خلال ساعة بتعداد جميع الاشخاص الذين مروا بهما على رصيف الشارع . وقف احدهم عند بوابة منزل، والآخر اخذ يروح ويجيء على الرصيف . فمن عد اكبر عدد من المارة ؟

قال صوت من الطرف الآخر للمنضدة :

– بسيرك ستعد اكثر ، انه امر واضح .

واعلن رئيس الاجتماع :

– سنعرف الاجابة عند العشاء ، من التالي !

٥ – الجد والحفيد . حدث ما سأتحدث عنه في عام ١٩٣٢ . كان عمري وقتها يبلغ عدد السنين التي يبينها الرقمان الاخيران من عام مولدي . وعندما حدثت جدي عن هذه العلاقة اثار دهشتي عندما قال ان مع سنه ايضا يحدث نفس هذا الشيء . لقد بدا لي ذلك غير ممكن ...

قال احدهم :

– شيء مفهوم ، انه غير ممكن .

– لكن تصوروا انه ممكن جدا ، لقد اثبت لي جدي ذلك .

فكم من السنين كان عمر كل منا ؟

٦ – تذاكر السكة الحديدية . وقالت المشتركة التالية في اللعبة :



شكل ٢ . اصرف تذاكر السكك الحديدية

— انا عاملة صرف تذاكر بالسكة الحديدية . يبدو للكثيرين انها مهنة سهلة . ولا يفكرون فى العدد الكبير من التذاكر الذى يجب على الصراف ان يبيعه حتى لو كان يعمل فى محطة صغيرة . اذ يجب ان يستطيع المسافرون الحصول على تذاكر من هذه المحطة الى اى محطة اخرى على نفس الخط فى الاتجاهين . وانا اعمل على خط فيه ٢٥ محطة . كم تعتقدون هو عدد الاشكال المختلفة من التذاكر المعدة من قبل سكك الحديد لكل شبابيكها ؟

قال رئيس الاجتماع :

— دورك ايها الرفيق الطيار .

٧ – طيران الهليكوبتر . طار من لينينجراد هليوكوبتر مباش
الى الشمال . وبعد ان طار في اتجاه الشمال ٥٠٠ كم ، غ
اتجاهه الى الشرق . وبعد ان قطع في هذا الاتجاه ٥٠٠كم غ
اتجاهه ثانية الى الجنوب وسار في هذا الاتجاه ٥٠٠ كم . ثم غ
اتجاهه الى الغرب وطار ٥٠٠ كم ، وهبط . المطلوب معرفته : اي
هبطت طائرة الهليوكوبتر بالنسبة للينينجراد: الى الغرب ام الى الشرق
الى الشمال ام الى الجنوب ؟

قال احدهم :

– انت تفترض السذاجة في من يحل هذه المسألة ..
خطوة للامام ، ثم ٥٠٠ خطوة الى اليمين ، ثم ٥٠٠ خطوة الى
الخلف ، ثم ٥٠٠ خطوة الى اليسار . الى اين نجيء ؟ من حيث
خرجنا سنعود ثانية !

– والآن ، اين تظنون مكان هبوط الهليكوبتر ؟

– في نفس مطار لينينجراد من حيث ارتفع . اليس كذلك

– طبعا ليس كذلك .

– اذن ، انا لا افهم .

وتدخل في الحديث جاره فقال :

– فعلا ، يوجد هنا شيء غامض . أ لم تنزل طائرة الهليكوبتر
في لينينجراد ؟ الا يمكن اعادة المسألة ؟

واستجاب الطيار الى طلبه عن طيب خاطر . وانصت اليه الحاضرون بكل انتباه ، ونظر كل واحد الى الآخر باستغراب .

قال رئيس الجلسة : حسنا ، حتى العشاء نستطيع ان نفكر فى هذه المسألة . اما الان فسنكمل .

٨ – الظل . فلتسمحوا لى – تكلم صاحب الدور التالى – ان موضوع لغزى هو موضوع الهليكوبتر نفسه : ايهما اعرض الهليكوبتر ام ظلة الكامل ؟

– هل هذا هو كل اللغز ؟

– نعم كله .

وجاء الجواب بالحل فورا :

– بالطبع الظل اعرض من الهليكوبتر ، اليست اشعة الشمس تتباعد كمروحة اليد .

واعترض احدهم :

– اننى أرى العكس فان اشعة الشمس متوازية . اذن يكون الظل والهليكوبتر بعرض واحد .

– كيف ذلك ؟ الم يحدث لك ان رأيت كيف تمتد اشعة الشمس من خلف سحابة ؟ عندئذ يمكن بالعين المجردة التأكد من ان اشعة الشمس تتباعد الواحد عن الآخر . ويجب ان يكون ظل الهليكوبتر اكبر بكثير من الهليكوبتر ، مثلما يكون ظل السحابة اكبر من السحابة نفسها .

— ولكن لماذا تعتبر اشعة الشمس عادة متوازية ؟ فالبحارة وعلماء الفلك جميعهم يرون ذلك ...

ولم يسمح رئيس الاجتماع للمناقشة ان تحتدم واعطى الكلمة للشخص التالى لتقديم لغزه .

٩ — مسألة باعواد الكبريت . اخرج الخطيب التالى اعواد الكبريت من العلبة واخذ يقسمها الى ثلاث اكوام .

وقال الحاضرون مازحين :

— هل تعتزم اشعال نار ؟

فقال الخطيب :

— اللغز سيكون بالكبريت . ها هى ثلاث اكوام غير متساوية . ويوجد فيها جميعا ٤٨ عودا . ولن اقول لكم كم عود فى كل كومة . ولكن تذكروا الآتى : اذا وضعنا من الكومة الاولى فى الكومة الثانية عددا من الاعواد مساويا لما هو موجود فى هذه الكومة الثانية ، ثم من الثانية وضعنا فى الثالثة عددا من الاعواد مساويا لما هو موجود فى هذه الكومة الثالثة ، واخيرا من الكومة الثالثة نضع فى الكومة الاولى عددا من الاعواد يساوى العدد الموجود فيها — اقول انه اذا فعلنا هذا كله فان عدد الاعواد فى كل الاكوام الثلاث سيكون متساويا . كم من الاعواد كان فى كل من الاكوام الثلاث فى البداية ؟

١٠ ــ <u>الجذمور الماكر</u> . بدأ جار آخر المتحدثين كلامه قائلا : هذا اللغز يذكرني بالمسألة التى عرضها على مؤخرا احد الرياضيين القرويين .

لقد كانت قصة كاملة مسلية بما فيه الكفاية . قابل احد القرويين فى الغابة عجوزا لا يعرفه . وصارا يتحدثان . نظر العجوز الى القروى بتمعن وقال :

ــ اعرف فى هذه الغابة جذعا عجيبا يساعد جدا عند الشدة .

ــ كيف يساعد ؟ هل يشفى ؟

ــ عن الشفاء فهو لا يشفى ، ولكنه يضاعف النقود . تضع اسفلة محفظة فيها النقود وتعد حتى المائة فتجد ان النقود فى المحفظة قد تضاعفت . انه يتمتع بهذه الخاصية . جذمور رائع !

قال الفلاح حالما :

ــ أريد ان اجربه .

ــ هذا ممكن ولكن يجب الدفع .

ــ الدفع لمن ؟ وهل كثير ؟

ــ تدفع لمن يريك الطريق . اى تدفع لى . اما هل تدفع كثيرا ، فأمره يحتاج الى حديث خاص .

واخذا يفاصلان . وبعد ان عرف العجوز ان فى محفظة الفلاح قليلا من المال ، وافق على ان يأخذ بعد كل مضاعفة روبلا واحدا و ٢٠ كوبيكا ، واتفقا على ذلك .

قاد العجوز الفلاح الى وسط الغابة ، وسار معه كثيرا واخيرا بحث وسط الاحراش عن جذمور شجرة شوح قديم مغطى بالاعشاب . اخذ من يدى الفلاح المحفظة ووضعها بين جذور الجذمور . وعد حتى المائة ثم اخذ العجوز يبحث عند اسفل الجذمور، واخيرا اخرج من هناك المحفظة واعطاها للفلاح .

نظر الفلاح فى المحفظة ووجد ان النقود قد تضاعفت فعلا ! فاخذ العجوز منها روبلا واحدا و ٢٠ كوبيكا وطلب منه ان يضع المحفظة مرة اخرى تحت الجذمور صانع المعجزات .

ومرة اخرى عدا حتى المائة ، ثم اخذ العجوز مرة ثانية فى البحث عند الجذمور وتضاعف عدد النقود مجددا . ومرة ثانية حصل العجوز من الفلاح على الروبل والـ ٢٠ كوبيكا المتفق عليها .

وللمرة الثالثة قاما باخفاء المحفظة اسفل الجذمور . وفى هذه المرة ايضا تضاعفت النقود . ولكن عندما الفلاح اعطى العجوز المكافأة المتفق عليها لم يبق فى المحفظة ولاكوبيكا واحدا . وفقد المسكين فى هذه العملية كل نقوده . ولم تعد هناك نقود لمضاعفتها وغادر الغابة مكتئبا .

ان سر معجزة تضاعف النقود طبعا واضح لكم ، فالعجوز لم يكن يعبث فى جذور الجذمور بدون شىء . ولكن هل تستطيعون الاجابة على سؤال آخر وهو : كم كان مع الفلاح من نقود قبل اجراء التجارب الشريرة مع الجذمور الماكر ؟

١١ ـ مسألة عن ديسمبر . بدأ الحديث الكهل الذى جاء دوره فى تقديم لغز فقال :

ـ انا ، ايها الرفاق ، متخصص فى اللغة ، وبعيد عن كل ما يتعلق بالرياضيات . ولذلك فلا تتوقعوا منى مسألة رياضية . استطيع فقط ان اقترح مسألة من المجال الذى اعرفه . فلتسمحوا لى بان اقدم لغزا خاصا بالتقويم .

ـ تفضل !

ـ يسمى الشهر الثانى عشر عندنا بديسمبر . ولكن اتعرفون ماذا تعنى كلمة « ديسمبر » ؟ تأتى هذه الكلمة من الكلمة الاغريقية « ديسا » اى عشرة ، ومن هنا ايضا الكلمة « ديسالتر » ـ اى عشرة لترات ، وكلمة « ديكاد » اى عشرة ايام ... وكلمات اخرى . يتضح من هنا ان ديسمبر يحمل معنى « العاشر » . كيف يمكن شرح عدم التطابق هذا ؟

قال رئيس الاجتماع :

ـ حسنا ، والآن بقى لغز واحد .

١٢ ـ الحيلة الحسابية . لقد جاء دورى الاخير الثانى عشر . وسأقدم لكم حيلة حسابية على سبيل التغيير وارجو منكم ان تبينوا اين يكمن سرها . فليكتب اى منكم ، وليكن مثلا رئيس جلستنا ، اى عدد ثلاثى على ورقة ودون ان أراه .

ـ هل يمكن ان تكون هنالك اصفار فى هذا العدد ؟

ـ لا اضع اى قيود . اى عدد ثلاثى يعجبكم .
ـ لقد كتبت . وماذا الآن ؟
ـ اكتب بجانبه نفس العدد مرة اخرى . سيحصل لديكم ، بالطبع ، عدد سداسى .
ـ نعم ، عدد سداسى .
ـ ناول الورقة الى جارك ، الذى يجلس ابعد بالنسبة لى . واطلب منه ان يقسم هذا العدد السداسى على سبعة .
ـ من السهل القول : اقسم على سبعة ، ولكن قد لا يقبل العدد القسمة على سبعة .
ـ لا تخف سيقسم بدون باق .
ـ انت لا تعرف العدد ، ومع ذلك واثق من انه سيقسم على سبعة .
ـ اقسم اولا ، ثم ستتكلم بعد ذلك .
ـ من حظك ان العدد قد قسم .
ـ اعط النتيجة لجارك بدون ان تقول لى شيئا . وسيقسمه هو على ١١ .
ـ تظن ان الحظ سيحالفك مرة اخرى ، وستقسم ؟
ـ اقسم ، ولن يتبقى باق .
ـ فعلا لم يتبق باق ! والآن ماذا ؟
ـ ناول النتيجة لجارك . وليقسمه ... على ١٣ مثلا .

ـ لقد اسأت الاختيار . فقليل من الاعداد تقسم على ١٣ بدون باق ... كلا ليس كذلك ، لقد قسمت بدون باق . انك لمحظوظ .

ـ اعطنى الورقة التى كتبت عليها النتيجة ، ولكن اطوها بحيث لا ارى النتيجة .

وبدون ان يفتح الورقة ، اعطى رئيس الجلسة الورقة الى صاحب اللغز .

ـ خذ منى الرقم الذى قد اخترته اولا . اهو صحيح ؟

فاجاب هذا باندهاش وهو ينظر الى الورقة : صحيح .

ـ هذا هو العدد الذى اخترته فعلا .. والآن بما ان كشف المتحدثين قد انتهى فلتسمحوا بان نختتم اجتماعنا ، ولحسن الحظ قد انتهى المطر . وسيتم حل كل هذه الالغاز اليوم بعد العشاء . وتستطيعون ان تقدموا لى الاوراق الحاوية على الاجابات .

حل الالغاز ١ ـ ١٢

١ ـ تم بحث لغز السنجاب الذى فى المرج بالكامل سابقا . ننتقل الى اللغز التالى .

٢ ـ لا يجب ، كما يفعل الكثيرون ، اعتبار ان ٨ كوبيكات قد دفعت مقابل ٨ قطع ، اى مقدار كوبيك واحد لكل قطعة . لقد دفعت هذه النقود مقابل الثلث فقط من القطع الثمانية واستخدم

النار ثلاثة بنفس القدر . من هنا ينجم ان كل الـ ٨ قطع قد ثمنت بـ ٨×٣ ، اى ٢٤ كوبيكا وثمن القطعة الواحدة ٣ كوبيكات .

والآن يمكن حساب كم يبلغ نصيب كل فرد من الاشخاص من النقود . فان سلوى تحصل على ١٥ كوبيكا ثمنا لخمس قطع ، ولكنها استعملت الفرن لقاء ٨ كوبيكات ، اذن يتبقى لها ١٥ ـ ٨ ، اى ٧ كوبيكات . ويجب ان تتقاضى ثريا ٩ كوبيكات ثمنا لقطعها الثلاث من الحطب ، ولو طرحنا ٨ كوبيكات ثمنا لاستخدامها الفرن ، فيكون المتبقى لها ٩ ـ ٨ اى كوبيك واحد .

وهكذا فعند التقسيم الصحيح يجب ان تأخذ سلوى ٧ كوبيكات ، ثريا كوبيكا واحدا .

٣ ـ الاجابة على السؤال الاول ـ بعد كم يوم ستجتمع فى المدرسة كل الحلقات الخمس فى آن واحد ، يمكن الاجابة على ذلك ببساطة لو استطعنا ان نجد اصغر عدد من كل الاعداد التى تقسم بدون باق على ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ . ومن السهل ان نقول ان هذا العدد هو ٦٠ . اذن ففى اليوم ٦١ ستجتمع مرة ثانية كل الحلقات الخمس : حلقة الحدادة بعد ٣٠ فترة ثنائية الايام ، النجارة بعد ٢٠ فترة ثلاثية الايام ، التصوير بعد ١٥ فترة رباعية الايام ، الشطرنج بعد ١٢ فترة خماسية الايام والكورال بعد ١٠ فترات سداسية الايام . لا يمكن اقامة مثل هذه الحفلة قبل مرور ٦٠ يوما . وستقام

الحفلة المماثلة التالية التى ستجتمع فيها كل الحلقات الخمس بعد مرور ٦٠ يوما ، اى فى ربع السنة التالى .

وهكذا يتضح خلال ربع السنة الاول ان هناك أمسية واحدة تجتمع فيها بالنادى مرة ثانية كل الحلقات الخمس للدراسة .

والاصعب من ذلك ايجاد اجابة على السؤال الثانى فى المسألة وهو : كم سيكون عدد الامسيات التى لن تجتمع فيها اى من الحلقات ؟ لكى نبحث عن هذه الايام ، يلزم كتابة كل الاعداد من ١ الى ٩٠ بالترتيب ، ونحذف فى هذا الصف ايام عمل حلقة الحدادة اى الاعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ .. الخ . ثم نحذف ايام عمل حلقة النجارة : الرابع والسابع والعاشر .. الخ ، وبعد ان نحذف ايام عمل حلقات التصوير ، والشطرنج ، والكورال ، تبقى تلك الايام من ربع السنة الاول التى لا تعمل فيها ولا حلقة .

من يقوم بهذا العمل سيتأكد من ان عدد الامسيات التى لن تعمل فيها الحلقات خلال ربع السنة الاول سيكون كثيرا وهو : ٢٤ . وسيبلغ عددها فى يناير ٨ امسيات وبالتحديد الثانى ، والثامن ، والاثنى عشر ، والرابع عشر ، والثامن عشر ، والعشرين ، والرابع والعشرين ، والثلاثين منه . وفى فبراير توجد ٧ من هذه الايام ، وفى مارس ٩ منها .

٤ ــ كلاهما عد عددا متساويا من المارة . على الرغم من ان الشخص الذى كان يقف عند البوابة عد الذين يمرون فى كلا

الاتجاهين ، ولكن الذى كان يتمشى رأى عددا من المارة يزيد بمرتين على ما رآه الآخر .

يمكن ان نفكر بطريقة ثانية . عندما عاد الشخص ، الذى كان يتمشى على الرصيف لاول مرة الى رفيقه الواقف فانهما قد عدا عددا متساويا من المارة ، فكل فرد مر امام الواقف قابل ايضا (فى هذا او ذاك الاتجاه من الطريق) الشخص الذى يسير (وبالعكس) . وكل مرة عاد فيها الذى يسير الى رفيقه الواقف ، فان الذى كان يسير عد ايضا عددا من المارة مساويا لما عده الواقف . نفس الشيء كان فى نهاية الساعة عندما تقابلا لآخر مرة ، وابلغ كل منهما للآخر نتيجة العد .

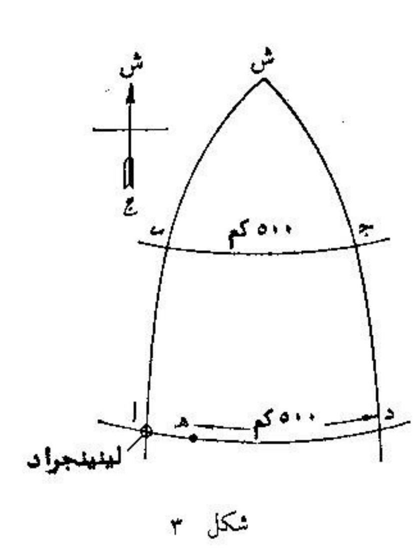
٥ ـ من النظرة الاولى قد يبدو فعلا ان المسألة وضعت خطأ : ينتج كما لو كان الحفيد والجد من سن واحدة . ولكن مطلوب المسألة ، كما سنرى الآن ، يتحقق ببساطة .

من الواضح ان الحفيد قد ولد فى القرن العشرين . اول رقمين فى سنة ميلاده بالتالى هما ١٩ وهو عدد المئات . العدد المكون من الارقام الاخرى بجمعها على نفس العدد يجب ان تكون ٣٢ . هذا يعنى ان العدد هو ١٦ وسنة ميلاد الحفيد هى ١٩١٦ ، وكان فى عام ١٩٣٢ يبلغ السادسة عشرة من العمر .

وجده ولد ، بالطبع ، فى القرن التاسع عشر ، واول رقمين من سنة ميلاده هما ١٨ ، العدد المضاعف المتكون من الارقام الاخرى

يجب ان يكون ١٣٢ . هذا يعنى ان نفس هذا العدد يساوى نصف ١٣٢ ، اى ٦٦ . اى ان الجد قد ولد فى سنة ١٨٦٦ وكان فى عام ١٩٣٢ يبلغ السادسة والستين من العمر .

وهكذا فان عمرى الحفيد والجد فى سنة ١٩٣٢ كانا يتمثلان بالعدد المتكون من الرقمين الاخيرين من سنتى ميلادهما .



شكل ٣

٦ — فى كل محطة من المحطات الـ ٢٥ يمكن ان يطلب المسافرون تذكرة لاى من المحطات ، اى الى ٢٤ نقطة . اى انه يجب طبع ٢٥ × ٢٤ = ٦٠٠ تذكرة مختلفة .

واذا ما كان الركاب يستطيعون الحصول على تذاكر ليس فى اتجاه واحد فقط (ذهابا) ، ولكن عند الرغبة يمكنهم ان يحصلوا على تذاكر عودة (ذهابا وايابا) وفى هذه الحالة يرتفع عدد اشكال التذاكر مرتين ، اى يكون من اللازم توفر ١٢٠٠ شكل مختلف .

٧ — هذه المسألة لا تحتوى على اية تناقضات . لا يجب ان نفهم ان طائرة الهليكوبتر طارت على محيط مربع . اذ لابد وان

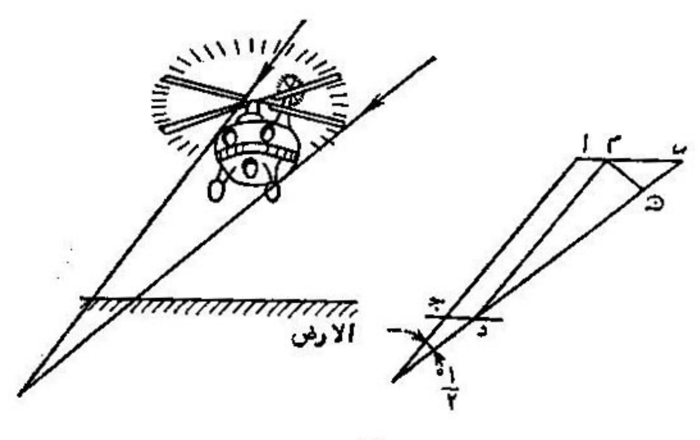
نأخذ فى الاعتبار الشكل الكروى للارض . وتتركز الفكرة فى ان خطوط الطول تقترب من بعضها فى الشمال (شكل ٣) ، ولذلك فبقطع ٥٠٠ كم على محيط دائرة متوازية واقعة على بعد ٥٠٠ كم شمالى خط العرض الواقعة عليه مدينة لينينجراد تكون طائرة الهليكوبتر قد ابتعدت الى الشرق بعدد كبير من الدرجات ، اكثر من التى قد قطعها فى الاتجاه المضاد الى ان يصل الى خط العرض الذى تقع عليه مدينة لينينجراد . ونتيجة لذلك فبانهاء الهليكوبتر للطيران يكون الى الشرق من مدينة لينينجراد .

ولكن الى اى مدى شرقا ؟ هذا يمكن حسابه . ترون على الشكل ٣ خط سير الهليكوبتر ا ب ج د ه . نقطة ش ـ القطب الشمالى . وفى هذه النقطة يتقابل خطا الزوال ا ب ، د ج . قطع الهليكوبتر اولا ٥٠٠ كم الى الشمال ، اى بخط الزوال ا ش . ونظرا لان طول درجة خط الزوال ١١١ كم فان قوس خط الزوال البالغ ٥٠٠ كم يحتوى على $\frac{٥٠٠}{١١١} \approx ٤,٥^\circ$. وتقع لينينجراد على خط العرض الستين ، وهذا يعنى ان نقطة ب تقع على خط عرض $٦٠^\circ + ٤,٥^\circ = ٦٤,٥^\circ$. ثم طارت الهليكوبتر الى الشرق ، اى بخط العرض ب ج وقطع عليه ٥٠٠ كم . ويمكن حساب طول درجة واحدة على خط العرض هذا (او معرفتها من الجداول) وهو يساوى ٤٨ كم تقريبا . وهنا من السهل تحديد كم عدد الدرجات التى طارها الهليكوبتر الى الشرق $\frac{٥٠٠}{٤٨} \approx ١٠,٤^\circ$. ثم طارت الهليكوبتر الى

الجنوب، اى على خط الزوال ج د ، وبعد ان قطعت ٥٠٠ كم ، كان يجب ان تكون مرة اخرى على خط عرض لينينجراد . والآن الطريق يقع الى الغرب ، اى على ا د ؛ ٥٠٠كم من هذا الطريق ، من المحتم انها اقصر من المسافة ا د . فى المسافة ا د يقع عدد من الدرجات مساو لما يقع فى ب ج ، اى ١٠,٤° . ولكن طول ١° على خط العرض ٦٠° يساوى تقريبا ٥٥,٥ كم . وبالتالى فان المسافة ما بين ا و د تساوى ٥٥,٥ × ١٠,٤ ≈ ٥٧٧ كم . نرى من ذلك ان الهليكوبتر لم تستطع الهبوط فى لينينجراد ، فهى لم تقطع مسافة ٧٧ كم اللازمة لكى يصل الى لينينجراد ، اى انها وصلت فوق بحيرة لادوجسكوية وما كانت تستطيع الهبوط سوى على الماء .

٨ – الذين تحدثوا حول هذه المسألة ارتكبوا عدة اخطاء . فمن الخطأ القول ان اشعة الشمس الساقطة على الكرة الارضية تتفرق بشكل ملحوظ . الارض صغيرة جدا اذا ما قورنت بالمسافة ما بينها وبين الشمس ، بحيث يمكن اعتبار ان اشعة الشمس الساقطة على جزء ما من سطحها تتفرق بزاوية لا يمكن حسابها وبالتالى يمكن عمليا اعتبار ان هذه الاشعة متوازية . وما نراه فى بعض الاحيان (ما يسمى « الانتشار من خلف السحب ») من انتشار اشعة الشمس كمروحة اليد ، ليست سوى نتيجة المنظور .

ففى المنظور تبدو الخطوط المتوازية كأنها متقابلة ، ولتتذكروا



شكل ٤

منظر القضبان الذاهبة الى بعد او منظر الممر المشجر الطويل .

ولكن ، نظرا لان اشعة الشمس تسقط على الارض بحزم متوازية ، فلا ينجم من ذلك بتاتا ان الظل الكامل للهليكوبتر يساوى نفس الهليكوبتر فى العرض . وبالنظر الى شكل ٤ ستفهمون ان الظل الكامل للهليكوبتر فى الفضاء يتضاءل فى اتجاه الارض ، بالتالى ، فان الظل الذى يكونه على سطح الارض ، يجب ان يكون اضيق من نفس الهليكوبتر : جـ د اصغر من ا ب .

لو عرفنا ارتفاع الهليكوبتر فيمكن حساب مقدار ضخامة هذا الفرق . لنفرض ان الهليكوبتر تطير على ارتفاع ١٠٠ م فوق سطح الارض . فالزاوية المصنوعة بالمستقيمين ا جـ ، ب د بينهما ، تساوى

الزاوية التى ترى بها الشمس من الارض . وهذه الزاوية معروفة وهى : حوالى $\frac{1}{2}°$. من جهة اخرى ، من المعلوم ان اى جسم مرئى بزاوية $\frac{1}{2}°$ يبعد عن العين ب ١١٥ مرة من عرضه . وهذا يعنى ان جزء المستقيم م ت (هذا المستقيم يرى من سطح الارض بزاوية $\frac{1}{2}°$) يجب ان يكون الجزء الـ $\frac{1}{115}$ من ا ج . وقيم ا ج اكبر من المسافة المائلة من ا حتى سطح الارض . لو كانت الزاوية ما بين اتجاه اشعة الشمس وسطح الارض تساوى ٤٥° فان ا ج (عند ارتفاع الهليكوبتر بمقدار ١٠٠ م) يكون ما يقرب من ١٤٠ م ، وبالتالى ، يكون جزء المستقيم م ت يساوى $\frac{140}{115} \approx 1{,}2$ م .

ولكن زيادة عرض الهليكوبتر على عرض الظل ، اى ان جزء المستقيم م ب اكبر من م ت ، وبالذات اكبر منه ب ١,٤ مرة ، نظرا لان الزاوية م ب د تقريبا تساوى بدقة ٤٥° . وبالتالى م ب يساوى $1{,}2 \times 1{,}4$ ، وهذا يعطى ١,٧ م تقريبا .

ان كل ما قلناه ينسب الى الظل الكامل للهليكوبتر ــ الظل الاسود والقوى ، وليس له علاقة بما يسمى بشبه الظل ، الضعيف والمهوش .

ويبين حسابنا ، بالمناسبة بأنه لو كان فى مكان الهليكوبتر كرة غير كبيرة ذات قطر اقل من ١,٧ م ، فانها لم تكن لتصنع ظلا ابدا ولكان قد ظهر شبه ظلها المهوش فقط .

٩ ــ تحل هذه المسألة من النهاية . سنبدأ بالقول انه بعد كل الانتقالات اصبح عدد اعواد الكبريت فى الاكوام متساويا . وبما انه لم يتغير نتيجة لهذه الانتقالات العدد الكلى لاعواد الكبريت وظل كما هو كان سابقا (٤٨)، فاذن اصبح فى كل كومة فى نهاية كل الانتقالات ١٦ عودا وهكذا يكون لدينا فى النهاية .

الكومة الاولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
١٦	١٦	١٦

وقبل ذلك مباشرة اضيف الى الكومة الاولى عدد اعواد مساو لما كان فيها قبل ذلك ، وبقول آخر قد تضاعف عدد الاعواد فيها . وهذا يعنى انه قبل الانتقال الاخير كان فى الكومة الاولى ليس ١٦ عودا ولكن ٨ اعواد فقط . اما فى الكومة الثالثة التى اخذت منها ٨ اعواد فكان فيها قبل ذلك ١٦ + ٨ = ٢٤ عودا .

والآن يكون لدينا توزيع الاعواد على الاكوام كالآتى :

الكومة الاولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
٨	١٦	٢٤

ثم نحن نعرف انه قبل ذلك نقل من الكومة الثانية الى الكومة الثالثة عدد من الاعواد ، مثل الذى كان فى الكومة الثالثة . اى ٢٤ عودا وهو ضعف عدد الاعواد التى كانت قبل ذلك فى الكومة الثالثة . من هنا نعرف توزيع الاعواد بعد الانتقال الاول .

الكومة الاولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
٨	١٦ + ١٢ = ٢٨	١٢

من السهل ان نعرف انه قبل الانتقال الاول (اى قبل ان ينقل من الكومة الاولى الى الكومة الثانية عدد من الاعواد مساو لما فى هذه الكومة الثانية) — كان توزيع الاعواد كالآتى :

الكومة الاولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
٢٢	١٤	١٢

هذه هى اعداد اعواد الكبريت الاولية فى الاكوام .

١٠ — من الاسهل حل هذا اللغز من النهاية ايضا . نحن نعرف انه بعد المضاعفة الثالثة اصبح فى المحفظة روبلا واحدا و ٢٠ كوبيكا (هذه النقود اخذها العجوز فى آخر مرة) . كم اذن من النقود كان قبل هذه المضاعفة ؟ بالطبع ٦٠ كوبيكا بعد ان دفع للعجوز روبلا واحدا و ٢٠ كوبيكا الثانية . وقبل الدفع كان فى المحفظة روبل واحد و ٢٠ كوبيكا + ٦٠ كوبيكا = روبل واحد و ٨٠ كوبيكا .

ثم ان الروبل الواحد و ٨٠ كوبيكا كانت فى المحفظة بعد المضاعفة الثانية . قبل ذلك كان كل الموجود ٩٠ كوبيكا . وهو الباقى بعد ان دفع للعجوز روبلا واحدا و ٢٠ كوبيكا . من هنا نعرف انه كان يوجد فى المحفظة قبل ان يدفع للعجوز ٩٠ كوبيكا +

+ روبل واحد و ٢٠ كوبيكا = روبلان و ١٠ كوبيكات . وكانت هذه النقود فى المحفظة بعد اول مضاعفة ، وقبل ذلك كان هناك اقل منها بمرتين اى روبل واحد و ٥ كوبيكات . هذه هى النقود التى بدأ بها القروى عملياته الاقتصادية الفاشلة .

فلنتحقق من النتيجة .

النقود فى المحفظة

بعد اول مضاعفة . . .	روبل واحد (ر) و ٥ كوبيكات (ك) × ٢ = ٢ر و ١٠ك
بعد أول دفع . . .	٢ر و ١٠ك – ١ر و ٢٠ك = ٩٠ك
بعد ثانى مضاعفة . .	٩٠ك × ٢ = ١ر و ٨٠ك
بعد ثانى دفع . . .	١ر و ٨٠ك – ١ر و ٢٠ك = ٦٠ك
بعد ثالث مضاعفة . .	٦٠ك × ٢ = ١ر و ٢٠ك
بعد ثالث دفع . . .	١ر و ٢٠ك – ١ر و ٢٠ك = صفر

١١ – يعود تقويمنا الى ايام الرومان القدماء . اذ كان الرومان (قبل يوليوس قيصر) ، يعتبرون بداية السنة ليس اول يناير وانما اول مارس . اذن كان ديسمبر عندئذ الشهر العاشر . وعند نقل بداية السنة الى اول يناير لم تتغير اسماء الاشهر . ومن هنا ظهر عدم التطابق ما بين الاسم والرقم بالترتيب ، الذى يوجد الآن لعدد من الشهور .

اسم الشهر	معنى التسمية	الرقم بالترتيب
سبتمبر	السابع	٩
اكتوبر	الثامن	١٠
نوفمبر	التاسع	١١
ديسمبر	العاشر	١٢

١٢ — فلنتتبع ما الذى صنع بالعدد المختار . قبل كل شىء كتب بجانبه العدد الثلاثى الذى اختير مرة اخرى . هذا هو نفس الشىء لو كتبنا بجانب العدد المختار ثلاثة اصفار ثم اضفنا الى العدد المتكون العدد الاول ، فمثلا :

$$٨٧٢ + ٨٧٢٠٠٠ = ٨٧٢٨٧٢$$

والآن اتضح ما الذى تم عمله مع العدد المختار ، وهو اننا ضاعفناه بمقدار ١٠٠٠ مرة ، وبالاضافة الى ذلك اضفنا اليه نفس العدد ، وباختصار ، ضربنا العدد الاصلى فى ١٠٠١ .

ما الذى فعلناه بعد عملية الضرب هذه ؟ قسمناه بعد ذلك على التوالى على ٧ ثم على ١١ ثم على ١٣ ، ومعناه فى نهاية المطاف اننا قسمناه على ٧ × ١١ × ١٣ اى على ١٠٠١ .

وهكذا ضربنا العدد المختار اولا فى ١٠٠١ ثم قسمناه على

١٠٠١ . هل عندئذ يلزم التعجب اذا كانت النتيجة هى نفس العدد المختار ؟

° ° °

وقبل ان ننهى باب الالغاز فى بيت الراحة ، سأتحدث عن ثلاث حيل حسابية تستطيعون بها ان تشغلوا وقت فراغ رفاقكم . وتتكون اثنتان من تلك الحيل فى تحزير الاعداد ، والحيلة الثالثة فى تحزير اصحاب الاشياء .

انها حيل قديمة وقد تكون معروفة لديكم ولكن قد لا يعرف الجميع على اى اساس وضعت هذه الحيل . ولا يمكن تنفيذها بوعى وادراك بدون معرفة الاسس النظرية للحيلة . ويتطلب اثبات الحيلتين الاوليتين القيام برحلة متواضعة وغير متعبة تماما فى مجال مبادىء الجبر .

١٣ ــ الرقم المحذوف . دع رفيقك يختار اى عدد كثير الارقام وعلى سبيل المثال ٨٤٧ . ودعه يوجد مجموع ارقام هذا العدد (٨ + ٤ + ٧) = ١٩ ، وان يطرح المجموع من العدد المختار ، سيكون العدد :

٨٤٧ ــ ١٩ = ٨٢٨

دعه يشطب رقما واحدا من العدد الذى حصل عليه وليس من المهم اى رقم منها ويقول لكم ما تبقى . اذكروا له فى الحال

الرقم الذى شطب على الرغم من انكم لا تعرفون العدد الذى اختاره ولم تروا ماذا صنع به .

كيف تستطيعون القيام بذلك وفيم يكمن حل الحيلة ؟

يتم ذلك بكل بساطة : يبحث عن الرقم الذى يكون مع المجموع الذى قيل لكم اقرب عدد يقسم على ٩ بدون باق . اذا كان مثلا قد حذف من العدد ٨٢٨ الرقم الاول (٨) وذكرت لكم الارقام ٢ و ٨ فانه بجمع ٢ + ٨ يمكننا معرفة انه الى اقرب عدد يقسم على ٩ ،اى الى العدد ١٨ يلزم العدد ٨ . وهذا هو الرقم المحذوف .

لم يحدث ذلك ؟ لانه اذا طرحنا من اى عدد مجموع ارقامه ، فيجب ان يبقى العدد الذى يقسم على ٩ ، وبتعبير آخر ، يتبقى ذلك العدد الذى يقسم مجموع ارقامه على ٩ . وفعلا فلنفرض انه فى العدد المختار يكون الرقم أ للمئات و ب ــ رقم العشرات و حـ ــ رقم الاحاد . هذا يعنى ان فى هذا العدد توجد الاحاد الآتية :

$$١٠٠ \text{أ} + ١٠ \text{ب} + \text{حـ}$$

فلنطرح من هذا العدد مجموع ارقامه أ + ب + حـ . ونحصل على :

$$١٠٠ \text{أ} + ١٠ \text{ب} + \text{حـ} - (\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}) = ٩٩ \text{أ} + ٩ \text{ب} = ٩ (١١ \text{أ} + \text{ب})$$

ولكن ٩ (١١ أ + ب) ، بالطبع يقسم على ٩ . وهذا يعنى انه عندما يطرح مجموع ارقامه فدائما لابد وان نحصل على عدد يقسم على ٩ بدون باق .

عند تنفيذ الحيلة قد يحدث ان يكون مجموع الارقام المذكورة لك قابلة نفسها للقسمة على ٩ (مثلا ٤ و ٥) . فهذا يدل على ان الرقم المحذوف هو اما صفر أو ٩ . وهكذا يجب ان تجيب : صفر أو ٩ .

واليكم الآن نفس الحيلة ولكنها فى شكل مختلف : بدلا من ان يطرح من العدد المختار مجموع ارقامه ، يمكن طرح الرقم الناتج من هذا العدد بواسطة تغيير وضع ارقامه . مثلا من العدد ٨٢٤٧ يمكن طرح ٢٧٤٨ (اذا ما حصلنا على عدد اكبر من المختار فيطرح الاصغر من الاكبر) . ثم يتم عمل نفس الشىء الذى تحدثنا عنه قبل ذلك ٨٢٤٧ ــ ٢٧٤٨ = ٥٤٩٩ . لو شطب الرقم ٤ ، فبمعرفة الارقام ٥ ، ٩ ، ٩ لابد وان تعرف ان اقرب الاعداد لـ ٥ + ٩ + ٩ اى ٢٣ ، الذى يقسم على ٩ هو ٢٧ . وهذا يعنى ان الرقم المحذوف هو ٢٧ ــ ٢٣ = ٤ .

١٤ ــ ان تحزر العدد بدون السؤال عن اى شىء . لتقترح على رفيقك ان يختار اى عدد ثلاثى لا ينتهى بصفر (شرط ان لا يقل الفرق ما بين الرقمين الاول والاخير عن ٢) ، واطلب بعد ذلك منه ان يضع الارقام فى نظام عكسى . بعمل ذلك يجب عليه ان يطرح العدد الاصغر من الاكبر ويتم جمع الفرق المحصول عليه معه ، ولكن يكتب فى تسلسل عكسى للارقام . وبدون ان تسأل اى شىء من رفيقك يمكن ان تقول له العدد الذى نتج لديه فى النهاية .

اذا كان قد اختير مثلا العدد ٤٦٧ ، فان رفيقك لابد وان يقوم بالعمليات التالية :

٤٦٧ ، ٧٦٤ ،

٧٦٤ −	٢٩٧ +
٤٦٧	٧٩٢
٢٩٧	١٠٨٩

وتقوم بابلاغه هذه النتيجة النهائية – ١٠٨٩ فكيف يمكن ان تعرفها ؟

لنبحث المسألة فى شكلها العام . ولنأخذ العدد المؤلف من الارقام أ ، ب ، حـ ، بحيث ان أ اكبر من حـ على اقل تقدير باثنين . هذا العدد يكتب عندئذ كالآتى :

١٠٠ أ + ١٠ ب + حـ

العدد ذو الوضع العكسى للارقام يحمل الشكل الآتى :

١٠٠ حـ + ١٠ ب + أ

الفرق بين الاول والثانى يساوى :

٩٩ أ – ٩٩ حـ

نقوم بالتحويل الآتى :

٩٩ أ — ٩٩ حـ = ٩٩ (أ — حـ) = ١٠٠ (أ — حـ) — (أ — حـ) = ١٠٠ ×
(أ — حـ) — ١٠٠ + ١٠٠ — ١٠ + ١٠ — أ + حـ = ١٠٠ (أ —
— حـ — ١) + ٩٠ + (١٠ — أ + حـ)

وهذا يعنى ان الفرق يتكون من الارقام الثلاثة الآتية :

رقم المئات : أ — حـ — ١
رقم العشرات : ٩
رقم الاحاد : ١٠ + حـ — أ

والعدد ذو الوضع العكسى للارقام يكتب كالآتى :

١٠٠ (١٠ + حـ — أ) + ٩٠ + (أ — حـ — ١)

بجمع الصيغتين :

١٠٠ (أ — حـ — ١) + ٩٠ + ١٠ + حـ — أ
\+ ١٠٠ (١٠ + حـ — أ) + ٩٠ + أ — حـ — ١

نحصل على

١٠٠ × ٩ + ١٨٠ + ٩ = ١٠٨٩

وهكذا فبغض النظر عن الارقام المختارة أ ، ب ، حـ سنحصل دائما على عدد واحد هو ١٠٨٩ . ومن السهل لذلك معرفة نتيجة هذه الحسابات : اذ انك تعرفها مسبقا .

من المفهوم ، انه لا ينبغى عرض هذه الحيلة على شخص واحد مرتين لان السر سيكتشف .

١٥ — من أخذ ؟ وماذا ؟ لتنفيذ هذه الحيلة الذكية يلزم تحضير اى ثلاثة اشياء صغيرة يمكن وضعها بسهولة فى الجيب ، مثلا : اقلام رصاص ، مفتاح ، مطواة . بالاضافة الى ذلك ضع على المنضدة طبقا فيه ٢٤ بندقة ، اذ لم يكن هناك بندق فيمكن وضع ٢٤ من حجارة الطاولة او الدومينو او اعواد الكبريت .. وما شابه ذلك .

واطلب من ثلاثة من الرفاق ان يخفوا فى جيوبهم ، فى الوقت الذى ستختبىء فيه — القلم ، المفتاح او السكين ... كل يأخذ ما يريد . وعليك انت ان تحزر اى الاشياء توجد فى جيب اى منهم .

عملية التحزير تتم كالآتى . برجوعك الى الحجرة بعد ان خبأ الرفاق الاشياء فى جيوبهم تبدأ من ان تعطيهم بعض البندق من الطبق ليحفظوه لديهم . تعطى الاول بندقة واحدة ، والثانى — بندقتين ، والثالث — ثلاث بندقات . ثم تخرج مرة اخرى من الحجرة وتترك للرفاق ان يقوموا بالآتى : يجب على كل منهم ان يأخذ من الطبق بندق كالآتى : من معه القلم يأخذ مثل ما اعطى من بندق ، ومن معه المفتاح يأخذ اكثر بمرتين مما اعطى ، ومن معه السكين يأخذ اكثر باربع مرات مما اعطى .

- اما البندقات الاخرى فتبقى فى الطبق .

عندما ينجز هذا كله واعطيت لك الاشارة للعودة ، انظر لدى دخولك الحجرة الى الطبق وقول اى الاشياء فى جيب اى منهم .

الحيلة تكون محيرة اكثر اذا كانت تتم بعدم وجود من يخبرك سرا باشارات غير ملحوظة . وليس فى هذه الحيلة اى خدعة . اذ تعتمد بكاملها على الحساب . انت تبحث عمن اخذ الشيء بواسطة عدد البندقات الباقية فى الطبق فقط . يبقى فى الطبق عدد غير كبير من البندقات من ١ حتى ٧ ويمكن عدها بنظرة واحدة . ولكن كيف يمكن مع ذلك بمعرفة ما تبقى من بندقات ، من الذى اخذ اى الاشياء ؟

ببساطة جدا : لكل حالة من توزيع الاشياء ما بين الرفاق يوجد عدد مختلف من البندقات الباقية فى الطبق . وسنتأكد من ذلك الآن .

لنفرض ان اسماء رفاقك الذين اعطيتهم بندقة و بندقتين ، وثلاث بندقات هى على التوالى :

فلاديمير وجيورجى وكونستانتين . سنرمز لهم باول حرف من الاسم ف ، ج ، ك . وسنرمز للاشياء ايضا بالحروف : قلم : أ ، مفتاح : ب ، سكين : حـ . كيف يمكن ان تتوزع ثلاثة اشياء بين ثلاثة اشخاص ؟ بستة طرق :

ف	ج	ك
أ	ب	حـ
أ	حـ	ب
ب	أ	حـ
ب	حـ	أ
حـ	أ	ب
حـ	ب	أ

من الواضح انه لا توجد اى حالات اخرى ، ففى الجدول تبين كل التركيبات الممكنة .

فلننظر الآن اى البواقى يقابل كل واحد من هذه الحالات :

ف ج ك	عدد البندقات المأخوذة	المجموع	الباقى
أ ب حـ	١ + ١ = ٢ ، ٢ + ٤ = ٦ ، ٣ + ١٢ = ١٥	٢٣	١
أ حـ ب	١ + ١ = ٢ ، ٢ + ٨ = ١٠ ، ٣ + ٦ = ٩	٢١	٣
ب أ حـ	١ + ٢ = ٣ ، ٢ + ٢ = ٤ ، ٣ + ١٢ = ١٥	٢٢	٢
ب حـ أ	١ + ٢ = ٣ ، ٢ + ٨ = ١٠ ، ٣ + ٣ = ٦	١٩	٥
حـ أ ب	١ + ٤ = ٥ ، ٢ + ٢ = ٤ ، ٣ + ٦ = ٩	١٨	٦
حـ ب أ	١ + ٤ = ٥ ، ٢ + ٤ = ٦ ، ٣ + ٣ = ٦	١٧	٧

انت ترى ان الباقى من البندقات فى كل حالة مختلف . ولذلك فبمعرفة الباى يمكن بسهولة تحديد توزيع الاشياء ما بين الرفاق . وانت مرة اخرى – للمرة الثالثة – تخرج من الحجرة وتنظر هناك فى مذكرتك حيث كتب الجدول السابق (المطلوب فقط هو العمود الاول والاخير) ولا داعى لان تتذكرها غيبا فهى عملية صعبة . وسيبين لك الجدول اى الاشياء فى جيب من . لو تبقت على الطبق ٥ بندقات فان هذا يعنى (الحالة ب حـ أ) ان

المفتاح – مع فلاديمير
السكين – مع جيورجى
القلم – مع كونستانتين

لكى تنجح الحيلة لابد وان تتذكر جيدا كم عدد البندقات التى اعطيتها لكل واحد من الرفاق (اعط البندقات لذلك دائما تبعا للابجدية كما فعلنا فى مثالنا هذا) .

الباب الثانى

الرياضيـــــات فى الالعـــاب

الدومينو

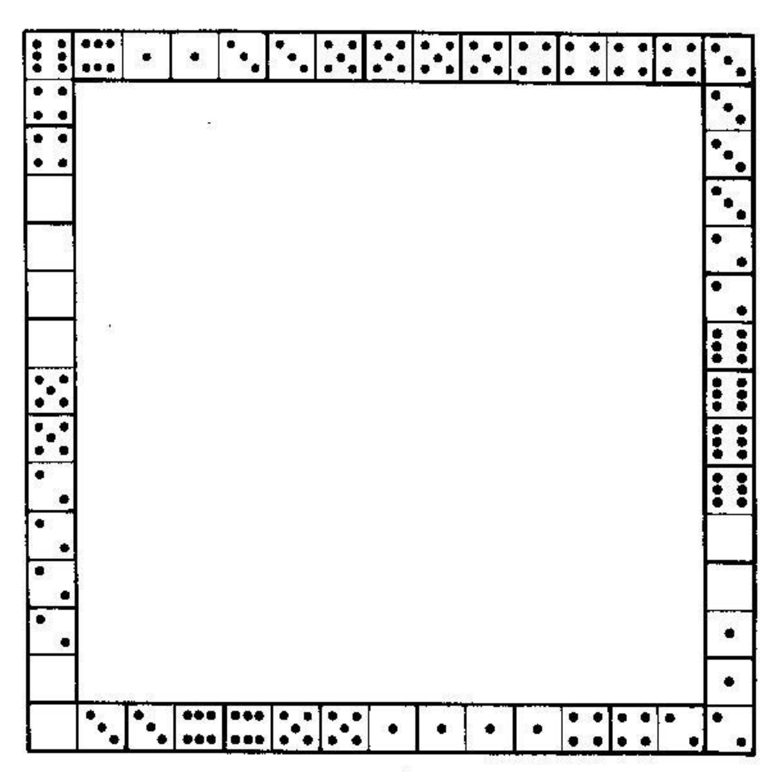
١٦ ـــ سلسلة من ٢٨ قطعة دومينو . لم يمكن وضع ٢٨ قطعة دومينو مع مراعاة قواعد اللعبة فى سلسلة مستمرة واحدة ؟

١٧ ـــ بداية السلسلة ونهايتها . عندما وضعت ٢٨ قطعة دومينو فى سلسلة ، كانت على احدى نهايتيها ٥ نقط .

كم من النقط يوجد على النهاية الاخرى ؟

١٨ ـــ حيلة بواسطة الدومينو . يأخذ رفيقك احدى قطع الدومينو ويقترح عليك ان تصنع من الـ ٢٧ قطعة الاخرى سلسلة مستمرة ، ويؤكد ان ذلك يمكن دائما مهما كانت القطعة المأخوذة . ويخرج هو الى الحجرة المجاورة لكى لا يرى السلسلة التى ستصنعها انت .

وستبدأ انت العمل وتتأكد من ان رفيقك كان صادقا : ٢٧ قطعة دومينو وضعت فى سلسلة واحدة . والاكثر عجبا ان رفيقك وهو موجود فى الحجرة المجاورة ودون ان يرى السلسلة التى صنعتها يقول لك من هناك ما هو عدد النقط على نهايتى السلسلة .



شكل ٥

وكيف يمكنه معرفة ذلك ؟ ولماذا كان هو متأكدا من ان ال ٢٧ قطعة دومينو تشكل سلسلة مستمرة ؟

١٩ – الاطار . الشكل ٥ يمثل اطارا مربعا مصنوعا من قطع الدومينو مع المحافظة على قواعد اللعبة . واضلاع الاطار متساوية

فى الطول ، ولكنها غير متساوية بمجموع عدد النقط ، اذ ان الصفين الاسفل والايمن يحتويان على ٤٤ نقطة اما الصفين الاخرين فيحتويان على ٥٩ و ٣٢ .

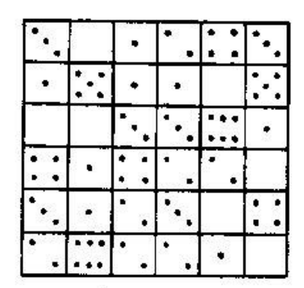
هل تستطيع ان تصنع مثل هذا الاطار ولكن بشرط ان يكون مجموع نقط كل الصفوف متساويا ويبلغ ٤٤ ؟

شكل ٦

٢٠ – سبعة مربعات . يمكن اختيار اربع قطع دومينو بحيث يتكون منها مربع فيه عدد متساو من النقط على كل ضلع (يمكن ان ترى على الشكل ٦ نموذجا لذلك ، وبجمع النقط على كل ضلع من اضلاع المربع تجد انه فى جميع الحالات مساو لـ ١١) .

هل تستطيع ان تصنع من كل قطع الدومينو فى نفس الوقت سبعة مربعات مماثلة له ؟ لا يطلب ان يكون مجموع النقط على كل ضلع واحدا فى جميع المربعات ، يلزم فقط ان يكون عدد النقط فى كل ضلع من اضلاعه الاربعة واحدا .

٢١ – مربعات سحرية من قطع الدومينو . مبين على الشكل ٧ مربع يتألف من ١٨ قطعة دومينو يتميز بان مجموع نقط اى صف ، طولى او عرضى او قطرى من صفوفه ، يكون واحدا هو : ١٣ . ومثل هذه المربعات تسمى منذ القدم « بالسحرية » .



شكل ٧

شكل ٨

المطلوب تكوين مثل هذه المربعات السحرية المكونة من ١٨ قطعة دومينو ، ولكن بمجموع آخر للنقط فى الصف . و١٣ — هو اصغر مجموع فى صفوف المربع السحرى المتكون من ١٨ قطعة ، واكبر مجموع هو ٢٣ .

٢٢ — متوالية من الدومينو . ترى على الشكل ٨ ست قطع دومينو وضعت تبعا لقواعد اللعبة وتختلف من حيث ان عدد النقط على القطع (على نصفى كل قطعة) يكبر بمقدار ١ . ويبدأ الصف من ٤ ويتكون من الاعداد الآتية للنقط :

٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

مثل هذا الصف من الاعداد التى تتزايد (او تتناقص) بمقدار ثابت يسمى « بالمتوالية الحسابية » . فى الصف الذى لدينا يكون

كل عدد اكبر من سابقه بـ ١ . ولكن فى المتوالية يمكن ان يكون اى « فرق » آخر .

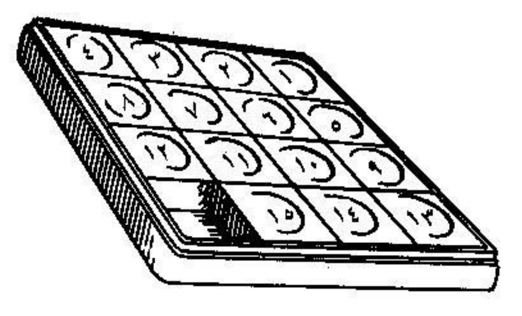
وتنحصر المسألة فى وجوب تكوين عدة متواليات من ست قطع دومينو .

اللعبة فى الـ ١٥ او « تاكن »

ان تأريخ العلبة المعروفة ذات الـ ١٥ مربعا المرقمة تأريخ طريف ، قليل من يعرفه ممن يلعبون هذه اللعبة . سنورد هذا التأريخ كما رواه باحث الالعاب الالمانى الرياضى ف . آرينس .

« منذ حوالى نصف قرن مضى ، فى اواخر السبعينيات ، ظهرت فى الولايات المتحدة الامريكية « اللعبة فى ١٥ » . وقد انتشرت بسرعة ونظرا لان عدد اللاعبين لابد وان يكون فرديا فقد تحولت الى فاجعة اجتماعية حقا .

« ونفس الشيء لوحظ ايضا على الجانب الآخر من المحيط — فى اوروبا . لقد كان من الممكن هنا رؤية المسافرين فى عربات الترام وفى ايديهم العلب ذات الـ ١٥ قطعة . وضج اصحاب المحلات والمؤسسات من ولع عمالهم بهذه اللعبة ، واضطروا الى منعهم من اللعب فى وقت العمل والتجارة . وقد استغل اصحاب مؤسسات اللهو هذه اللعبة ونظموا مسابقات كبيرة فيها .



شكل ٩ . اللعبة فى الـ ١٥

ولقد زحفت اللعبة حتى الى صالات الاحتفالات للرايخستاج الالمانى . ويتذكر الجغرافى والرياضى المعروف زيجموند جيونتر الذى كان نائبا فى زمن زحف وباء هذه اللعبة قائلا : « اتذكر حتى هذه اللحظة الرجال الشيوخ فى الرايخستاج وقد ركزوا كل اهتمامهم فى النظر الى العلبة المربعة التى فى ايديهم » .

وكتب احد المؤلفين الفرنسيين : « ولقد وجدت هذه اللعبة فى باريس مكانا تحت السماء المكشوفة ، وفى المنتزهات وانتشرت بسرعة من العاصمة الى الاقاليم . «لم يكن هناك من بيت ريفى منعزل لم يعشش فيه هذا العنكبوت متحفزا للفريسة التى ستقع فى حبائله » .

« فى عام ١٨٨٠ وصلت حمى اللعبة ، كما يبدو ، الى ذروتها . ولكن بعد ذلك وبسرعة انتصر سلاح الرياضيات على هذا الوحش .

لقد وجدت النظرية الرياضية للعبة انه من المسائل المختلفة التى يمكن ان تقترح يمكن حل نصفها فقط اما النصف الآخر فلا يمكن باى حال حله » .

« وغدا واضحا لماذا لم تحل بعض المسائل على الرغم من الجهد العنيد ، ولماذا خصص منظموا المسابقات جوائز ضخمة لمن يحل المسائل . وفاق الجميع من هذه الناحية مخترع اللعبة نفسه الذى عرض على ناشر جريدة فى نيويورك ان يقدم لملحق يوم الاحد مسألة غير محلوله مع جائزة ١٠٠٠ دولار لمن يحلها ، وبما ان الناشر تردد فقد اعرب المخترع عن استعداده التام لان يدفع مبلغ الـ ١٠٠٠ دولار من جيبه الخاص . واسم المخترع ساموىل (سام) لويد . ولقد اكتسب شهرة واسعة كواضع للمسائل المسلية ومجموعة كبيرة من الالغاز . ومن الطريف انه لم يستطع الحصول فى امريكا على براءة اختراع اللعبة التى ألفها . وتبعا للنظام كان يجب عليه ان يقدم « نموذجا عاملا » لاجراء التجارب عليه ، وقد اقترح على موظف مكتب براءة الاختراعات مسألة ، وعندما سأل الاخير هل هى تحل ام لا ، كان يجب على المخترع ان يقول «لا، ان حلها رياضيا غير ممكن» . « فى هذه الحالة — يتبع الاعتراض — لا يمكن ان يكون هذا النموذج عاملا وبدون نموذج لا يمكن اعطاء براءة الاختراع » . ولقد اكتفى لويد بهذه النتيجة . ولكن

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٥	١٤	١٣

شكل ١٠

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٤	١٥	١٣

شكل ١١

ربما كان قد اتخذ موقفا اكثر الحاحا لو تنبأ بالنجاح الساحق لاختراعه * .

ونورد ادناه ما رواه مخترع اللعبة نفسه عن بعض الحقائق عن تأريخها :

« يذكر ساكنو مملكة الالغاز القدماء — يكتب لويد — كيف اننى اجبرت كل العالم فى بداية السبعينيات ان يشغل فكره بعلبه ذات مربعات متحركة عرفت باسم « اللعبة فى الـ ١٥ » (شكل ١٠) . خمس عشر قطعة كانت موضوعة فى علبة مربعة فى نظام صحيح وفقط المربعين ١٤ و ١٥ كان موضوع كل منهما مكان الآخر كما هو مبين على الشكل المرفق (شكل ١١) . وتركزت المسألة فى انه بتحريك القطع على التوالى نوصلها الى الوضع العادى ، بحيث يصحح وضع القطعتين ١٤ و ١٥ .

---

* استخدم مارك توين هذا المشهد فى روايته « المدعى الامريكى » .



شكل ١٢ . « ... عن الموظفين المحترمين الذين يقضون ليالى مستمرة واقفين تحت مصابيح الاضاءة ... »

« ولم يحصل على الجائزة ذات الـ ١٠٠٠ دولار المقترحة لقاء اول حل صحيح لهذه المسألة اى احد ، على الرغم ان الجميع عكفوا على حل هذه المسألة بلا كلل . وتروى اقاصيص مضحكة عن التجار الذين نسوا فتح محلاتهم من جراء هذا ، واقاصيص عن الموظفين المحترمين الذين كانوا يقضون ليالى مستمرة تحت مصابيح الشارع ليجدوا الطريق الى الحل . لم يرغب احد فى ان يعدل عن البحث عن الحل حيث ان الجميع كانوا يشعرون بثقة فى النجاح المنتظر . ويقولون ان الملاحين اوقعوا سفنهم فى الاماكن

الضحلة من جراء هذه اللعبة ، وان سائقى القطارات لم يتوقفوا فى المحطات ، وان اصحاب المزارع اهملوا محاريثهم » .

* * *

سنعرف القارئ ببداية نظرية هذه اللعبة . هى فى شكلها الكامل معقدة جدا وتقترب كثيرا من احد اقسام الجبر العالى (« نظرية المحددات ») . وسنقتصر فقط على بعض المفاهيم التى صاغها ف . أرينس .

« مسألة اللعبة تتركز عادة فى انه بواسطة التحريك المتوالى الممكن بوجود مكان خال ، تنقل اى وضع ابتدائى لل ١٥ قطعة الى وضعها الطبيعى اى الى ذلك الوضع الذى تكون عنده كل القطع مرتبة حسب ارقامها : فى الزاوية العليا اليمنى ١ ، الى اليسار ٢ ، ثم ٣ ، وفى الزاوية العليا اليسرى ٤ ، ثم فى الصف الثانى من اليمنى الى اليسار ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ وهكذا . وهذا الوضع النهائى العادى مبين على شكل ١٠ .

« فلتتخيل الآن الوضع عندما تكون ال ١٥ قطعة موضوعة بدون نظام . يمكن دائما باجراء عدة نقلات وضع القطعة ١ فى مكانها الذى تحتلة على الرسم .

« وبنفس الشكل تماما يمكن دون المساس بالقطعة ١ ان نضع القطعة ٢ فى المكان المجاور الى اليسار . ثم ، بدون المساس

بالقطعتين ١ و ٢ يمكن وضع القطعتين ٣ و ٤ فى مكانهما الطبيعى ، لو انهما بالصدفة لم يكونا فى الصفين الرأسيين الاخيرين ، فانه من السهل توصيلهما لهذه المنطقة . ثم بواسطة عدة نقلات يمكن الوصول الى النتيجة المرجوة . والآن الصف الاعلى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ يتمتع بنظام ولن نمس هذا الصف فى العمليات التالية لتحريك القطع . بمثل هذه الطريقة نجتهد لان نوصل الصف الثانى الى النظام ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ . ومن السهل التأكد انه يمكن الوصول الى ذلك دائما . ثم فى محيط الصفين الاخيرين يلزم ان نضع القطعتين ٩ و ١٣ فى وضعهما الصحيح ، وهذا ايضا ممكن دائما . من كل القطع التى وضعت فى مكانها السليم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ و ١٣ لا يجب تحريك ولا واحدة منها ويتبقى جزء مكون من ستة مربعات احدها خال اما الخمسة الباقية فمشغولة بالقطع ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ فى نظام حر . فى حدود هذا الجزء سداسى المكان ، يمكن دائما ان نضع القطع ١٠ ، ١١ ، ١٢ فى مكانها الصحيح . عندما نعمل ذلك نجد انه فى الصف الاخير تكون القطعتان ١٤ ، ١٥ موضوعتين اما فى نظامهما الطبيعى او العكسى (شكل ١١) . وبهذه الطريقة التى يمكن للقراء ان يراجعوها عمليا نصل الى النتيجة الآتية .

« يمكن توصيل اى وضع ابتدائى اما الى وضع شكل ١٠ (وضع I) او شكل ١١ (وضع II) .

« اذا كان يمكن توصيل احد الاوضاع ، وللاختصار سنرمز له بالحرف س ، الى الوضع I ، فمن الواضح ان العكس صحيح اى ان ننقل الوضع I الى الوضع س . اذ ان كل تحركات القطع عكسية : فلو ان ، على سبيل المثال ، فى الدائرة I نستطيع ان نضع القطعة ١٢ فى المكان الخالى ، فيمكن لهذه الخطوة فى نفس الوقت ان تتم فى الاتجاه العكسى بحركات عكسية فى الاتجاه .

« وهكذا ، تكون لدينا مجموعتان من الاوضاع ، بحيث ان اوضاع المجموعة الاولى يمكن ان تنقل الى الوضع العادى I ، اما المجموعة الثانية — فالى الوضع II . وبالعكس يمكن الحصول من الوضع العادى على اى وضع فى المجموعة الاولى ، ومن الوضع II — اى وضع من المجموعة الثانية . واخيرا ، اى وضعين تابعين لمجموعة واحدة يمكن ان يحولا كل الى الآخر .

« الا يمكن ان نسير قدما ونوحد هذين الوضعين I و II ؟ يمكن بدقة اثبات (دعنا لا ندخل فى التفصيلات) ان هذه الاوضاع لا تتحول واحدة الى اخرى باى عدد من النقلات . ولذلك فكل العدد الضخم لاوضاع القطع ينتهى الى مجموعتين : ١) الى تلك التى يمكن تحويلها الى الوضع الطبيعى I ، وهذه الاوضاع محلولة . ٢) الى تلك التى يمكن ان تحول الى الوضع II وهى بالتالى لا يمكن تحويلها مهما كان الحال الى الوضع العادى : وهذه الاوضاع هى التى وضعت لحلها جوائز مالية ضخمة .

« كيف تعرف هل ينتمى هذا الوضع الى المجموعة الاولى او الثانية ؟ سيوضح المثال ذلك .

« لنبحث الوضع التالى .

« اول صف من القطع منتظم ، والثانى ايضا عدا القطعة الاخير (٩) . وهذه القطعة تحتل المكان ، الذى تحتله فى الوضع العادى القطعة ٨ . ويعنى ذلك ان القطعة ٩ تقف قبل القطعة ٨ : مثل هذا السبق فى النظام العادى يسمى « عدم نظام » . وعن القطعة ٩ سنقول : يوجد هنا عدم نظام ١ . بالنظر الى باقى القطع ، نلاحظ « سبق » بالنسبة للقطعة ١٤ ، هى موضوعة على ثلاثة اماكن (القطع ١٢ ، ١٣ ، ١١) قبل وضعها العادى ويوجد لدينا هنا ٣ عدم نظام (١٤ قبل ١٢ ، ١٤ قبل ١٣ ، ١٤ قبل ١١) . ولقد عددنا الى الآن ١ + ٣ = ٤ عدم نظام . ثم القطعة ١٢ موضوعة قبل القطعة ١١ وكذلك ايضا القطعة ١٣ قبل القطعة ١١ . هذا يعطى ايضا ٢ عدم نظام . والمجموع يكون ٦ عدم نظام . بمثل هذه الطريقة يحدد العدد الكلى لعدم النظام لاى وضع على ان يخلى المربع الاخير فى الزاوية اليسرى السفلى مسبقا . اذا كان عدد عدم النظام كما هو فى الحالة التى نتكلم عنها زوجيا ، فان الوضع المعطى يمكن ان يوصل الى وضع نهائى عادى ، وبكلمات اخرى فان هذا الوضع ينسب الى الاوضاع المحلولة . اما اذا كان عدد عدم النظام فرديا فان الوضع ينسب الى المجموعة الثانية ، اى

للاوضاع غير المحلولة (صفر عدم نظام يعتبر عدد زوجى من عدم النظام) . «نظرا للوضوح الذى ادخل الى هذه اللعبة بواسطة الرياضيات ، لم يعد هناك مكان لحمى الشغف بهذه اللعبة . لقد وضعت الرياضيات نظرية كاملة لهذه اللعبة . نظرية لم تترك ولا نقطة واحدة ــ تدعو للشك . وتتوقف نتيجة اللعبة ليس على الصدف ولا الموهبة ، كما هو الحال فى الالعاب الاخرى ولكن على العوامل الرياضية التى تحددها بثقة تامة» . فلنتوجه الآن الى الالغاز فى هذا المجال . ها هى عدة مسائل ممكنة الحل والتى وضعها مخترع اللعبة .

٢٣ ــ اول مسألة للويد . من الوضع المبين على الشكل ١١ ، حول القطع الى وضعها الصحيح ولكن بمكان خال فى الزاوية العليا الى اليمين (شكل ١٣) .

٢٤ ــ ثانى مسألة للويد . من الوضع المبين على الشكل ١١

	١	٢	٣
٤	٥	٦	٧
٨	٩	١٠	١١
١٢	١٣	١٤	١٥

شكل ١٣

١٣	٩	٥	١
١٤	١٠	٦	٢
١٥	١١	٧	٣
	١٢	٨	٤

شكل ١٤

ادر العلبة ربع دورة وحرك القطع الى ان تأخذ الوضع المبين على الشكل ١٤ .

٢٥ ــ ثالث مسألة للويد . بتحريك القطع تبعا لقوانين اللعبة من الوضع على شكل ١١، حول العلبة الى « مربع سحرى » ، وهذا يعنى ان تضع القطع بحيث يكون مجموع الاعداد فى كل الاتجاهات مساويا ٣٠ .

لعبة الكروكيت

بدراسة الالغاز التى تنسب الى الدومينو ولعبة الـ ١٥ كنا ضمن حدود الحساب . ولكننا بالانتقال الى الالغاز على ملعب الكروكيت ندخل جزيئا الى ميدان الهندسة .

اقترح على لاعبى الكروكيت المسائل الخمس الآتية :

٢٦ ــ المرور خلال المرمى او اجراء كروكيت (اصطدام كرتين) ؟

ان المرمى الكروكيتى مستطيل الشكل . ويبلغ عرضه ضعف قطر الكرة . فى مثل هذه الظروف ما هو الاسهل : هل المرور ، بحرية وبدون الاصطدام بالسلك من احسن وضع فى المرمى ام الاصطدام بالكرة من مثل تلك المسافة (يحدث اصطدام الكرتين) ؟

٢٧ ــ الكرة والعمود . يبلغ سمك عمود الكروكيت من الاسفل

٦ سم ، وقطر الكرة ١٠ سم . كم مرة اسهل ان تصطدم بالكرة من ان تصطدم من نفس المسافة بالاسفين (تطعن نفسها) ؟

٢٨ - المرور من المرمى او الطعن ؟ الكرة اضيق بمرتين من المرمى المستطيل الشكل واعرض بمرتين من العمود القائم . ما الاسهل : ان تمر بحرية من المرمى من احسن وضع او ان تطعن من نفس هذه المسافة ؟

٢٩ - المرور خلال المصيدة ام اجراء اصطدام بين الكرتين ؟ عرض المرمى المستطيل الشكل اكبر بثلاث مرات من قطر الكرة . ما هو الاسهل : ان تمر بحرية من احسن وضع عبر المصيدة ام يتم من نفس المسافة اصطدام الكرة بالكرة ؟

٣٠ - المصيدة المسدودة الطرف . باية نسبة ما بين عرض المرمى المستطيل وقطر الكرة يصبح المرور خلال المصيدة امرا مستحيلا ؟

حل الالغاز ١٦ - ٣٠

١٦ - لتسهيل المسألة سنضع جانبا مؤقتا كل القطع الثنائية السبع : صفر - صفر ، ١ - ١ ، ٢ - ٢ ... الخ . فتبقى اذن ٢١ قطعة يتكرر عليها كل عدد من النقط ٦ مرات . مثلا ال ٤ نقط (فى مجال واحد) توجد على القطع الست الآتية :

٤ - صفر ، ٤ - ١ ، ٤ - ٢ ، ٤ - ٣ ، ٤ - ٥ ، ٤ - ٦

وهكذا ، يتكرر نفس عدد النقط كما نرى فى عدد زوجى من المرات . ومن الواضح انه يمكن وضع القطع من هذه المجموعة الواحدة الى الاخرى باعداد متساوية من النقط الى ان ننتهى من المجموعة كلها . وعندما يتم ذلك وحينما تكون الـ ٢١ قطعة قد وضعت فى سلسلة مستمرة ، عندئذ ندخل عند الوصلات صفر — صفر ، ١ — ١ ، ٢ — ٢ ... الخ الـ ٧ ثنائيات التى وضعناها جانبا . بعد هذا يتضح ان جميع الـ ٢٨ قطعة دومينو تكون موضوعة فى سلسلة واحدة مع مراعاة قواعد اللعبة .

١٧ — من السهل ان نبين ان السلسلة المكونة من ٢٨ قطعة دومينو ، يجب ان تنتهى بنفس عدد النقط التى بدأت بها . وفعلا : لو لم يكن كذلك ، لتكرر عدد النقط الواقعة على نهايات السلسلة بعدد فردى من المرات (لكن فى داخل السلسلة تكون اعداد النقط واقعة بشكل الازواج) ولكننا نعلم انه فى المجموعة الكاملة لقطع الدومينو يتكرر كل عدد من النقط ٨ مرات ، اى عدد زوجى من المرات . وبالتالى فان الافتراض والذى افترضناه الذى ينص على ان عدد النقط على نهايات السلسلة غير متساو — يكون غير صحيح : يجب ان يكون عدد النقط واحدا (يدعى مثل هذا الاسلوب فى التفكير ، كما هو الحال فى الرياضيات ، بـ « الاثبات من العكس ») .

وبالمناسبة تنتج من خاصية السلسلة التى اثبتناها توا النتيجة الطريفة الآتية : يمكن دائما اغلاق السلسلة المكونة من ٢٨

قطعة بنهايتيها والحصول على حلقة . اذن فان المجموعة الكاملة لقطع الدومينو يمكن ان تكون بالتالى مرتبة مع مراعاة قواعد اللعبة ليس فقط فى سلسلة ذات نهايتين حرتين ولكن ايضا فى حلقة مقفلة .

وقد يتساءل القارئ كم هو عدد الطرق المختلفة التى تنفذ بها هذه السلسلة او الحلقة ؟ فنقول دون الدخول فى تفاصيل حسابات مرهقة هنا ان عدد الطرق المختلفة لتكوين السلسلة (او الحلقة) المؤلفة من ٢٨ قطعة دومينو كبير جدا : اكثر من ٧ تريليون . والعدد الدقيق هو :

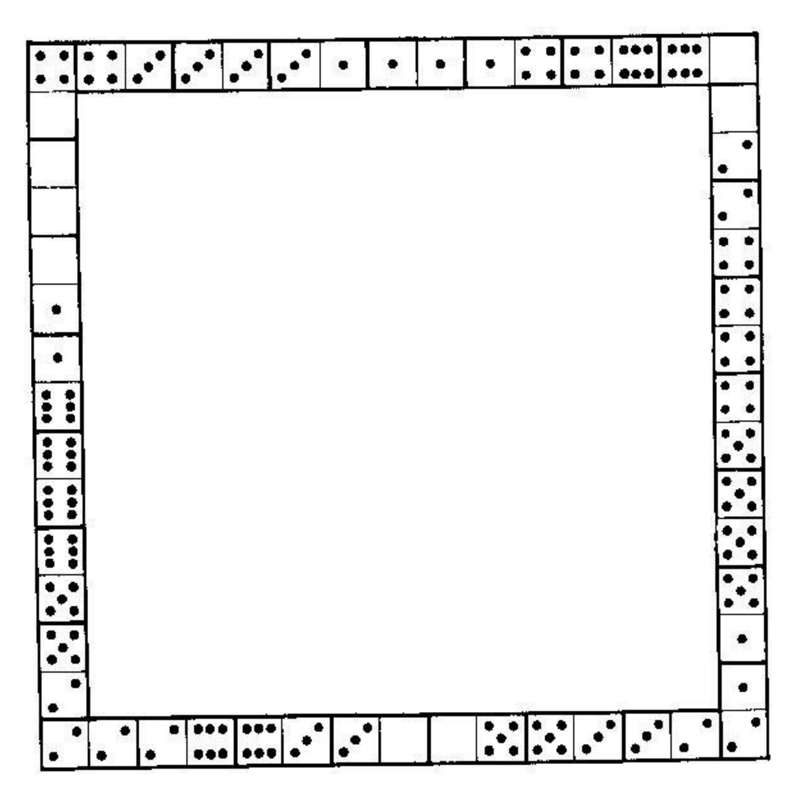
٧ ٩٥٩ ٢٢٩ ٩٣١ ٥٢٠

(هذا العدد يمثل حاصل ضرب الحدود الآتية $٢^{١٣} \times ٣^{٨} \times ٥ \times ٧ \times$
$\times ٤٢٣١$) .

١٨ ــ ينبع حل هذا اللغز مما قيل توا . نحن نعرف ٢٨ قطعة دومينو ، يمكن وضعها دائما فى حلقة مقفلة ، وبالتالى ، واذا رفعنا من هذه الحلقة قطعة واحدة فان :

١) القطع الـ ٢٧ المتبقية تكون سلسلة مستمرة ذات اطراف مفتوحة .

٢) عدد النقط على نهايات هذه السلسلة ستكون تلك التى توجد على القطعة المأخوذة .



شكل ١٥

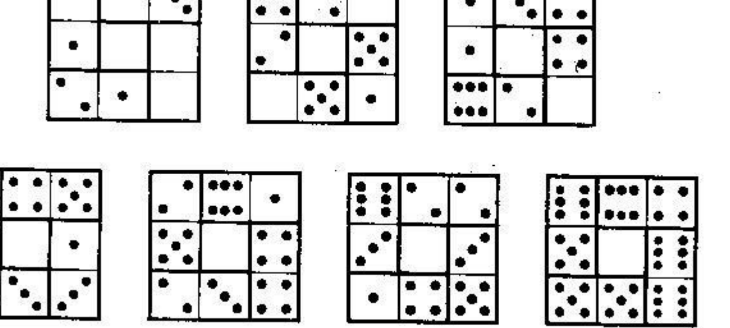
وكذلك فباخفاء قطعة دومينو نستطيع ان نذكر مقدما اى عدد من النقط سيكون على نهايتى الدائرة المكونة من القطع المتبقية .

١٩ ـ ان مجموع نقط كل جوانب المربع المطلوب لابد وان تساوى ٤٤ × ٤ = ١٧٦ ، اى بمقدار ٨ اكبر من مجموع

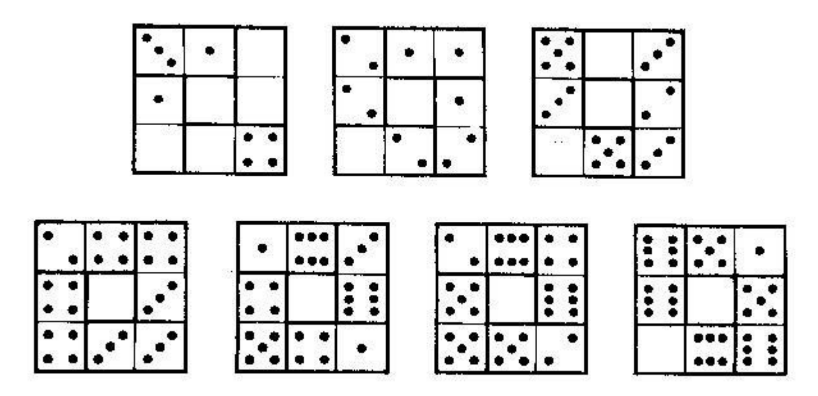
النقط الموجودة على مجموعة قطع الدومينو بكاملها (١٦٨) . ويحدث هذا ، بالطبع ، من ان اعداد النقط التى تحتل رؤوس المربع تحسب مرتين . ويتحدد مما قلناه كيف يجب ان يكون مجموع النقط على رؤوس المربع : ٨ . هذا يسهل بعض الشيء البحث عن الوضع المطلوب على الرغم من ان ايجاده صعب جدا . والحل مبين على الشكل ١٥ .

٢٠ ــ سنورد حلين من الحلول الكثيرة الممكنة لهذه المسألة . فى الحل الاول (شكل ١٦) لدينا :

مربع واحد بمجموع ٣ ،	مربعان بمجموع ٩
مربع واحد بمجموع ٦ ،	مربع واحد بمجموع ١٠
مربع واحد بمجموع ٨ ،	مربع واحد بمجموع ١٦



شكل ١٦



شكل ١٧

فى الحل الثانى (شكل ١٧) :

مربعان بمجموع ٤ ، مربعان بمجموع ١٠

مربع واحد بمجموع ٨ ، مربعان بمجموع ١٢

٢١ – مبين على الشكل ١٨ نموذج للمربع السحرى ذى مجموع النقط فى الصف ١٨ .

شكل ١٨

٢٢ – اليك على سبيل المثال متواليتين يبلغ الفرق بينهما ٢ :

أ) صفر – صفر ، صفر – ٢ ، صفر – ٤ ، صفر – ٦ ، ٤ – ٤ (او ٣ – ٥) ، ٥ – ٥ (او ٤ – ٦) .

ب) صفر – ١ ، صفر – ٣ (او ١ – ٢) ، صفر – ٥ (او ٢ – ٣) ، ١ – ٦ (او ٣ – ٤) ، ٣ – ٦ (او ٤ – ٥) ، ٥ – ٦ .

وكل المتواليات سداسية القطع يمكن وضع ٢٣ حلا لها . والقطع الابتدائية لها هى :

أ) للمتوالية ذات الفرق ١ :

صفر – صفر   ١ – ١   ٢ – ١   ٢ – ٢   ٣ – ٢
صفر – ١   ٢ – صفر   ٣ – صفر   ٣ – ١   ٢ – ٤
١ – صفر   صفر – ٣   صفر – ٤   ١ – ٤   ٣ – ٥
صفر – ٢   ١ – ٢   ١ – ٣   ٢ – ٣   ٣ – ٤

ب) للمتوالية ذات الفرق ٢ :

صفر – صفر ، صفر – ٢ ، صفر – ١

٢٣ – يمكن ان نحصل على وضع المسألة من الوضع الابتدائى بواسطة الـ ٤٤ حركة التالية :

١٤، ١١، ١٢، ٨، ٧، ٦، ١٠، ١٢، ٨، ٧،
٤، ٣، ٦، ٤، ٧، ١٤، ١١، ١٥، ١٣، ٩،
١٢، ٨، ٤، ١٠، ٨، ٤، ١٤، ١١، ١٥، ١٣،
٩، ١٢، ٤، ٨، ٥، ٤، ٨، ٩، ١٣، ١٤،
١٠، ٦، ٢، ١.

٢٤ – يمكن الوصول الى وضع المسألة بواسطة الـ ٣٩ حركة الآتية :

١٤، ١٥، ١٠، ٦، ٧، ١١، ١٥، ١٠، ١٣، ٩،
٥، ١، ٢، ٣، ٤، ٨، ١٢، ١٥، ١٠، ١٣،
٩، ٥، ١، ٢، ٣، ٤، ٨، ١٢، ١٥، ١٤،
١٣، ٩، ٥، ١، ٢، ٣، ٤، ٨، ١٢.

٢٥ – يمكن الحصول على المربع السحرى ذى المجموع ٣٠ بعد عدة حركات هى :

١٢، ٨، ٤، ٣، ٢، ٦، ١٠، ٩، ١٣، ١٥،
١٤، ١٢، ٨، ٤، ٧، ١٠، ٩، ١٤، ١٢، ٨،
٤، ٧، ١٠، ٩، ٦، ٢، ٣، ١٠، ٩، ٦،
٥، ١، ٢، ٣، ٦، ٥، ٣، ٢، ١، ١٣،
١٤، ٣، ٢، ١، ١٣، ١٤، ٣، ١٢، ١٥، ٣.

٢٦ – ربما يقول حتى اللاعب المجرب انه فى الاحوال المذكورة يكون من الاسهل المرور خلال المرمى اسهل من عمل كروكيت . فالمرمى اعرض بمرتين من الكرة . ولكن هذا التصور خاطئ : فالمرمى – طبعا – اوسع من الكرة ولكن الممر الحر للكرة خلال المرمى اضيق بمرتين من الهدف اللازم لاجراء الكروكيت .

انظر الى الشكل ١٩ وسيصبح ما قلناه ، واضحا لك . لا يجب ان يقترب مركز الكرة الى سلك المرمى بمسافة اقل من قيمة نصف

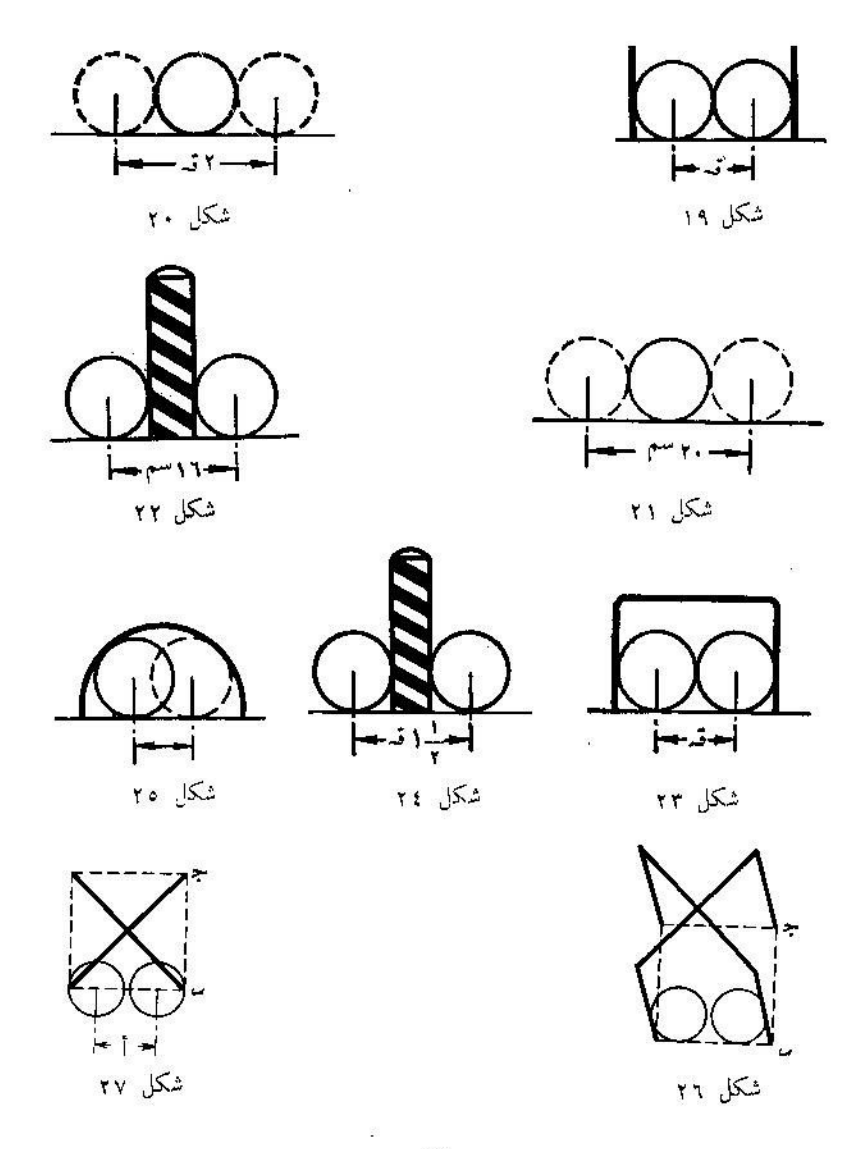
القطر والا لاصطدمت الكرة بالسلك . واذن يتبقى لمركز الكرة هدف اقل من عرض المرمى بمقدار نصفى قطر . ومن السهل رؤية انه فى ظروف مسألتنا يكون عرض الهدف عند المرور خلال المرمى فى احسن وضع مساويا لقطر الكرة .

لننظر الآن كم هو كبير عرض الهدف بالنسبة لمركز الكرة المتحركة عند اجراء الكروكيت . من الواضح انه اذا كان مركز الكرة التى تصادم يقترب من مركز الكرة التى تصطدم بها باقل من نصف قطر الكرة فان الصدمة محققة . ومعناه ان عرض الهدف فى هذه الحالة ، كما هو واضح من الشكل ٢٠ ، يساوى قطرى الكرة .

وهكذا فعلى الرغم من رأى اللاعبين ، ففى الاحوال المعطية يكون اسهل بمرتين ان تصطدم بالكرة ناهيك عن المرور الحر خلال المرمى من احسن وضع .

٢٧ – بعد كل ما قيل الآن لا تتطلب هذه المسألة شرحا طويلا . من السهل رؤية (شكل ٢١) ان عرض الهدف عند الاصطدام يساوى ضعف قطر الكرة ، اى ٢٠ سم ، اما عرض الهدف عند التسديد الى العمود فيساوى مجموع قطر الكرة والعمود ، اى ١٦ سم (شكل ٢٢) . هذا يعنى ان اجراء الاصطدام اسهل من الطعن الذاتى بـ :

$$٢٠ \div ١٦ = ١\frac{١}{٤} \text{ مرة}$$



شكل ١٩

شكل ٢٠

شكل ٢١

شكل ٢٢

شكل ٢٣

شكل ٢٤

شكل ٢٥

شكل ٢٦

شكل ٢٧

بمقدار ٢٥ ٪ فقط . ويلجأ اللاعبون عادة الى زيادة فرص اجراء الاصطدام بالمقارنة مع اصابة العمود .

٢٨ – وقد يفكر لاعب آخر كالآتي : بما ان المرمى اعرض بمرتين من الكرة ، والعمود اضيق بمرتين من الكرة فانه يجب لغرض المرور الحر خلال المرمى ان يكون الهدف اعرض باربع مرات منه في حالة اصابة العمود . ولن يرتكب قارئنا الذى تعلم من المسائل السابقة مثل هذا الخطأ . فسيعرف انه للتنشين على العمود يكون الهدف اعرض بمقدار $1\frac{1}{2}$ مرة منه عند المرور عبر المرمى من احسن وضع . هذا واضح من النظر الى الشكلين ٢٣ و ٢٤ .

(اذا لم يكن المرمى مستطيل الشكل وانما منحنيا بشكل قوس فان ممر الكرة يكون اضيق ايضا – كما هو سهل تصوره من النظر الى الشكل ٢٥) .

٢٩ – يظهر من الشكلين ٢٦ و٢٧ ان الجزء أ المتبقى لمرور مركز الكرة ضيق بما فيه الكفاية عند الاحوال المذكورة في المسألة . والذين يعرفون الهندسة يعرفون ان الجانب ا ب للمربع اصغر من قطره ا جـ بـ ١,٤ مرة تقريبا .

لو كان عرض المرمى ٣ ن (حيث ن – قطر الكرة) فان ا ب يساوى

$$٣ن \div ١,٤ \approx ٢,١ \ ن$$

يكون الجزء أ الذى يعتبر هدفا لمركز الكرة التى تمر خلال المصيدة من احسن وضع اضيق . وهو اقل بقطر كامل ، اى يساوى

$$٢,١ \ ن - ن = ١,١ \ ن$$

ولكن الهدف لمركز الكرة الصادمة يساوى ، كما نعلم ، ٢ ن . وبالتالى فالاصطدام يكون اسهل بمرتين تقريبا فى الاحوال المذكورة ، من المرور خلال المصيدة .

٣٠ – لا تسمح المصيدة بالمرور تماما فى تلك الحالة ، عندما يزيد عرض المرمى على عرض قطر الكرة باقل من ١,٤ مرة . وينبع هذا من التوضيح المعطى فى المسألة السابقة . واذا كان المرمى على شكل قوس ، تزداد احوال المرور عندئذ سوءا .

الباب الثالث

دستة الغاز اخرى

٣١ – الحبل * . حبل آخر ؟ سألت الام وهى تخرج يديها من حوض الغسيل . – ممكن التفكير كما لو كنت انا كلى مصنوعة من الحبال . تسمع دائما حبل ثم حبل آخر . الم اعطك امس لفة كبيرة من الحبال . لم كل هذه الحبال ؟ ماذا عملت بها ؟

فاجاب الولد : ماذا عملت بها ؟ اولا ، لقد استرجعت نصفها منى ثانية ...

– وبماذا تأمر ان الف رزم الغسيل ؟

– بينما اخذ توم نصف ما تبقى لكى يصطاد السمك فى القناة .

– يجب دائما ان تتنازل لاخيك الاكبر .

– وانا تنازلت . لقد بقى القليل جدا ، فمن الباقى اخذ بابا النصف لاصلاح الحمالات التى انقطعت عنده بسبب الضحك

* هذا اللغز ينسب الى الكاتب القصصى الانجليزى بارى بين .

عندما حدث حادث للسيارة . وبعد ذلك لزم اختى اخذ خمس الباقى لكى تربط شعرها بشكل عقدة ...

— وماذا صنعت بالباقى من الحبل ؟

— بالباقى ؟ الذى تبقى بعد ذلك كان ٣٠ سم فقط ، فهل يمكن عمل هاتف من هذا الجزء الصغير .

فما هو الطول الاولى للحبل ؟

٣٢ — الجوارب والقفازات . وضعت فى صندوق واحد ١٠ ازواج من الجوارب البنية اللون و ١٠ ازواج سوداء ، وفى صندوق آخر وضعت ١٠ ازواج من القفازات البنية ، وعشرة ازواج سوداء . كم من الجوارب والقفازات يكفى اخذه من كل صندوق لكى يمكن منها اختيار زوج واحد (اى زوج) من الجوارب وزوج من القفازات ؟

٣٣ — طول عمر الشعرة . كم هوفى المتوسط عدد الشعرات على رأس الانسان ؟ لقد حسبت : حوالى ١٥٠٠٠٠ * . وحدد ايضا كم شعرة فى المتوسط تسقط فى الشهر : ٣٠٠٠ شعرة تقريبا .

---

* يتعجب الكثيرون كيف امكن معرفة ذلك : هل بتعداد كل الشعرات على الرأس ؟ لا ، لم ذلك ، عدوا فقط كم من الشعر يوجد على ١ سم٢ من سطح الرأس . وبمعرفة ذلك وسطح الجلد المغطى بالشعر ، من السهل تحديد العدد الكلى للشعرات على الرأس . باختصار ، ان علماء التشريح قد عدوا الشعرات بنفس الطريقة التى يستخدمها العاملون فى الغابات لعد الاشجار فى الغابة .

كيف يمكن بهذه المعطيات ، حساب زمن – فى المتوسط طبعا – بقاء كل شعرة على الرأس ؟

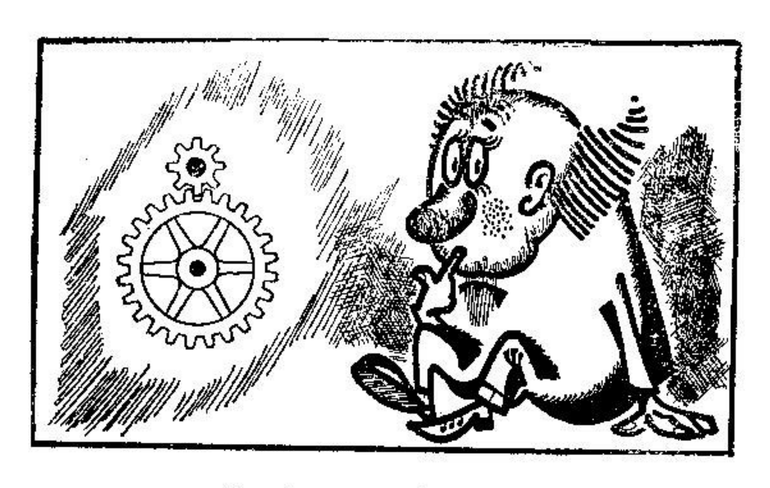
٣٤ – المرتب . ان مرتبى عن الشهر الماضى ، مضافة اليه اجور عمل الساعات الاضافية ، يساوى ١٣٠ روبلا . علما بان المرتب الاصلى اكبر بـ ١٠٠ روبل من اجور عمل الساعات الاضافية . ما هو مرتبى بدون اجور عمل الساعات الاضافية ؟

٣٥ – التزحلق على الزحافات . حسب رياضى التزحلق على الجليد انه اذا قطع ١٠ كم فى الساعة فانه سيصل الى المكان المعين سلفا متأخرا ساعة واحدة عن وقت الظهر ، واذا ما تزحلق بسرعة ١٥ كم فى الساعة لوصل الى المكان بساعة قبل الظهر .

باى سرعة يجب ان يتزحلق لكى يصل الى المكان المعين فى منتصف النهار بالضبط ؟

٣٦ – عاملان . اثنان من العمال احدهما عجوز والآخر شاب يسكنان فى شقة واحدة ويعملان فى مصنع واحد . يقطع الشاب المسافة من المنزل حتى المصنع فى ٢٠ دقيقة ، اما العجوز فيقطعها فى ٣٠ دقيقة . بعد كم دقيقة يلحق الشاب بالعجوز اذا كان الاخير قد خرج من المنزل قبل الشاب بـ ٥ دقائق .

٣٧ – اعادة استنساخ التقرير . كلفت عاملتا آلة كاتبة باعادة استنساخ التقرير . والاكثر خبرة منهما تستطيع ان تنفذ كل العمل فى ساعتين والاقل خبرة فى ثلاث ساعات .



شكل ٢٨ . كم مرة يدور الترس ؟

فى اى زمن ستعيدا استنساخ التقرير اذا قسمنا العمل بينهن بغية تنفيذه فى اقل وقت ؟

عادة تحل المسائل من هذا النوع بنموذج المسألة المشهورة عن حمامات السباحة . وبالذات : ففى مسألتنا يحدد، كم من العمل الكلى تنفذه كلا عاملتى الآلة الكاتبة فى الساعة، ثم يجمع الكسران ويقسم واحد صحيح على هذا المجموع . الا تستطيع انت ان تبتكر طريقة جديدة لحل مثل هذه المسائل تختلف عن المعمول بها ؟

٣٨ — العجلتان المسننتان . ترس ذو ٨ اسنان جرى تعشيقه مع عجلة ذات ٢٤ سنا (شكل ٢٨) . وعند دوران العجلة الكبيرة يمر الترس حولها تماما .

المطلوب معرفته ، كم مرة سيدور الترس حول محوره خلال الزمن الذى يصنع فيه دورة كاملة حول العجلة المسننة الكبيرة ؟

٣٩ـ كم عمره ؟ سأل احد محبى الالغاز ، كم عمره ؟ فاجاب بالآتى :

ـ خذ ثلاثة اضعاف عدد سنوات عمرى بعد ثلاث سنوات ، واطرح منها ثلاثة اضعاف عدد سنوات عمرى قبل ثلاث سنوات فسيبقى لديك عدد سنوات عمرى بالضبط .

فكم عمره الآن ؟

٤٠ـ عائلة ايفانوف . كم عمر ايفانوف ؟

ـ فلنفكر . كان منذ ثمان عشرة سنة مضت اكبر بثلاثة اضعاف من ابنه . انا اذكر ذلك جيدا لان فى ذلك العام تم تعداد النفوس العام .

ـ اسمح لى رجاء ، فاعتمادا على ما اعرف ، انه الآن اكبر من ابنه بمرتين . هل هذا ابن آخر ؟

ـ لا ، نفس الابن ، ان لديه ابنا واحدا فقط . ولذلك فليس من الصعب ان نحدد كم عمر ايفانوف الآن وكم عمر ابنه .

كم عمره ايها القارئ ؟

٤١ـ تحضير المحلول . يوجد فى قنينة شيء من حامض الكلوريد وفى قنينة اخرى نفس الكمية من الماء . ولتحضير المحلول رى اولا اخذ ٢٠ جم من الحامض من القنينة الاولى وضعت فى

القنينة الثانية . ثم اعيد سكب ثلثى المحلول ، الحاصل فى القنينة الثانية ، فى الاولى . بعد ذلك اتضح انه يوجد فى القنينة الاولى سائل اكثر باربع مرات من الموجود فى الثانية . كم هى كمية الحامض والماء المأخوذة فى البداية ؟

٤٢ ـ المشتريات . عندما خرجت لشراء بعض الحاجيات كان فى محفظتى ١٥ روبلا تقريبا تتألف من روبلات منفردة وقطع معدنية ذات فئة ٢٠ كوبيكا . عندما عدت جلبت معى عددا من الروبلات المنفردة بقدر ذلك العدد الذى كان معى من القطع النقدية ذات فئة ٢٠ كوبيكا فى البداية ، ومن القطع النقدية ذات فئة ٢٠ كوبيكا مثل ما كان معى اولا من الروبلات المنفردة . مع العلم انه بقيت فى محفظتى ثلث الكمية التى اخذتها معى عند خروجى لشراء الحاجيات .

فما هو ثمن المشتريات ؟

حل الالغاز ٣١ ـ ٤٢

٣١ ـ بعد ان اخذت الام النصف بقى $\frac{١}{٢}$ ، وبعد ان اخذ الاخ الاكبر تبقى $\frac{١}{٤}$. وبعد الاب $\frac{١}{٨}$ وبعد الاخت $\frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٤٠}$. فاذا كان ٣٠ سم يساوى $\frac{٣}{٤٠}$ من الطول الابتدائى يكون طول الحبل الاصلى $٣٠ \div \frac{٣}{٤٠} = ٤٠٠$ سم او ٤ م .

٣٢ـ يكفي اخذ ثلاثة جوارب حيث ان اثنين منها سيكونان دائما من لون واحد . والامر ليس بهذه السهولة بالنسبة للقفازات التي يختلف كل عن الآخر ليس فقط باللون ولكن نصف القفازات الى يمين والنصف الآخر الى يسار . وهنا يكفي ٢١ قفازا . ولو اننا حصلنا على كمية اقل ، ولتكن مثلا ٢٠ ، فانه قد يحدث ان كل الـ ٢٠ تكون على يد واحدة (١٠ قفازات بنية اللون من اليسار و ١٠ سوداء من اليسار) .

٣٣ـ ان آخر شعرة ستسقط ، بالطبع ، هي تلك التي تكون اليوم اصغر من الكل في العمر ، اي التي عمرها يوما واحدا .

فلننظر بعد كم من الزمن سيحين الوقت لتسقط . في اول شهر من هذه الـ ١٥٠٠٠٠ شعرة التي توجد الآن على الرأس ستسقط ٣ آلاف وفي الشهرين الاولين ـ ٦ آلاف وخلال السنة الاولى ١٢ مرة في ٣ آلاف ، اي ٣٦ الف . ستمر ، بالتالي ، اربع سنوات واكثر بقليل قبل ان يأتي الدور لان تقع آخر شعرة . بهذه الطريقة يتحدد لدينا العمر المتوسط لشعرة الانسان: ٤ سنوات واكثر بقليل

٣٤ـ يجيب الكثيرون ، بدون تفكير ، ١٠٠ روبل . هذا غير صحيح : اذ انه في هذه الحالة سيكون المرتب الاصلي اكبر من الساعات الاضافية بـ ٧٠ روبلا فقط وليس بـ ١٠٠ .

يجب حل المسألة كالآتي . نحن نعلم ، انه اذا اضفنا الى ثمن اجور عمل الساعات الاضافية ١٠٠ روبل فاننا سنحصل على

المرتب الاصلى . ولذلك اذا ما اضفنا الى ١٣٠ روبلا ١٠٠ روبل اخرى فانه يجب ان نحصل على مرتبين اصليين . ولكن ١٣٠ + ١٠٠ = ٢٣٠ . يعنى ان المرتب الاصلى المضاعف يكون ٢٣٠ روبلا . من هنا ينجم ان المرتب الواحد بدون اجور عمل الساعات الاضافية يساوى ١١٥ روبلا اما قيمة اجرة عمل الساعات الاضافية فتكون المتبقى من ١٣٠ روبلا اى ١٥ روبلا .

فلنراجع : ان المرتب ١١٥ روبلا هو اكبر من ثمن الساعات الاضافية ، اى اﻟ ١٥ روبلا بـ ١٠٠ روبل ، كما ورد فى شروط المسألة .

٣٥ــ ان هذه المسألة طريفة من ناحيتين : اولا فمن السهل ان تدخل فكرة ان السرعة المطلوبة هى المتوسط ما بين ١٠ كم و ١٥ كم فى الساعة ، اى تساوى $١٢\frac{١}{٢}$ كم فى الساعة . ومن السهل التأكد من ان مثل هذا الحل غير صحيح . ففعلا لو ان طول المسافة المقطوعة أ من الكيلومترات فعند التزحلق بسرعة ١٥ كيلومترا سيمكث المتزحلق على الطريق $\frac{أ}{١٥}$ من الساعات ، وعند ما تكون السرعة ١٠ كم سيمكث $\frac{أ}{١٠}$ ، وعند ما تكون السرعة ١٢,٥ كم سيمكث $\frac{أ}{١٢,٥}$ او $\frac{٢أ}{٢٥}$. ولكن عندئذ يجب ان تتحقق المتساوية

$$\frac{٢أ}{٢٥} - \frac{أ}{١٠} = \frac{أ}{١٥} - \frac{٢أ}{٢٥}$$

لان كلا من هذين الفرقين يساوى ساعة واحدة . وباختصار أ
نحصل على :

$$\frac{٢}{٢٥}-\frac{١}{١٠}=\frac{١}{١٥}-\frac{٢}{٢٥}$$

او فى صورة اخرى:

$$\frac{١}{١٠}+\frac{١}{١٥}=\frac{٤}{٢٥}$$

وهذه المتساوية غير صحيحة :

$\frac{١}{١٥}+\frac{١}{١٠}=\frac{١}{٦}$ اى $\frac{٤}{٢٤}$ وليس $\frac{٤}{٢٥}$

والخاصية الثانية للمسألة هى انها يمكن ان تحل ليس فقط بدون مساعدة المعادلات ولكن حتى ببساطة بحساب شفوى .

لنتصور الآتى : اذا ما امضى المتزحلق عندما تكون سرعته ١٥ كم فى الساعة فترة فى الطريق تزيد بمدة ساعتين (اى مثل الوقت اللازم عند سرعة ١٠ كم فى الساعة) ، فانه يقطع مسافة تزيد بـ ٣٠ كم على ما قطعه فى الحقيقة . ونحن نعلم انه فى ساعة واحدة يقطع ٥ كم اكثر ، وهذا يعنى انه لمكث فى الطريق $\frac{٣٠}{٥}=٦$ ساعات . من هنا يتحدد طول المسافة المقطوعة عند ما تكون السرعة ١٥ كم فى الساعة : ٦ – ٢ = ٤ ساعات . وبالاضافة لذلك تتضح المسافة المقطوعة : ١٥ × ٤ = ٦٠ كم .

5*

والآن من السهل ايجاد باى سرعة يجب ان يتزحلق لكى يصل الى المكان فى منتصف النهار بالضبط او بتعبير آخر لكى يقطع المسافة خلال ٥ ساعات:

$$\frac{٦٠}{٥} = ١٢ \text{ كم/ساعة}$$

والآن من السهل التأكد بواسطة التجربة أن هذه الاجابة صحيحة .

٣٦ – يمكن حل المسألة دون اللجوء الى معادلة وبطرق مختلفة . ها هى الطريقة الاولى . العامل الشاب يقطع فى ٥ دقائق $\frac{١}{٤}$ الطريق ، والعجوز $\frac{١}{٦}$ الطريق ، اى اقل من الشاب بمقدار

$$\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$$

وبما ان العجوز قد سبق الشاب بمقدار $\frac{١}{٦}$ الطريق ، اذن فسيبلغه الشاب بعد

$$\frac{١}{٦} \div \frac{١}{١٢} = ٢$$

بفترة خمس دقائق او بالاحرى بعد ١٠ دقائق .

الطريقة الثانية اسهل : لقطع كل الطريق يحتاج العامل العجوز الى ١٠ دقائق اكثر من الشاب . لو ان العجوز خرج قبل الشاب بـ ١٠ دقائق لوصل الاثنان الى المصنع فى نفس الوقت . ولو ان العجوز خرج قبله بـ ٥ دقائق فقط فان الشاب لابد وان يلحقه فى

منتصف الطريق اى بعد مرور ١٠ دقائق (يقطع العامل الشاب كل الطريق فى ٢٠ دقيقة) .

ويمكن حل المسألة بطرق حسابية اخرى .

٣٧ — ان الحل غير المعتاد للمسألة كالآتى : قبل كل شيء لنطرح السؤال التالى : كيف يجب على عاملتى الآلة الكاتبة ان تقتسما العمل بينهن لانهائه فى نفس الوقت ؟ (من الواضح انه عند هذا الشرط فقط ، اى بدون توقف ، سينفذ العمل فى اقصر وقت) . ونظرا لان عاملة الآلة الكاتبة الاكثر تجربة تستنسخ بمرة ونصف اسرع من العاملة الاقل تجربة ، فواضح ان الاولى يجب ان تأخذ عملا يزيد بـ $1\frac{1}{2}$ مرة عما تأخذه الثانية . وعندئذ ستنهى الاثنتان العمل فى نفس الوقت . من هنا ينجم ان الاولى يجب ان تستنسخ $\frac{3}{5}$ التقرير اما الثانية فـ $\frac{2}{5}$ التقرير .

والمسألة بهذه الطريقة تصبح محلولة تقريبا . يتبقى فقط ايجاد الوقت اللازم لكى تنفذ عاملة الآلة الكاتبة الاولى $\frac{3}{5}$ العمل . ونحن نعرف انها تستطيع تنفيذ كل العمل فى غضون ساعتين ، وهذا يعنى ان $\frac{3}{5}$ العمل ستنفذه فى $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ ساعة . فى نفس هذا الزمن يجب ان تنفذ عاملة الآلة الكاتبة الثانية جزء العمل المخصص لها .

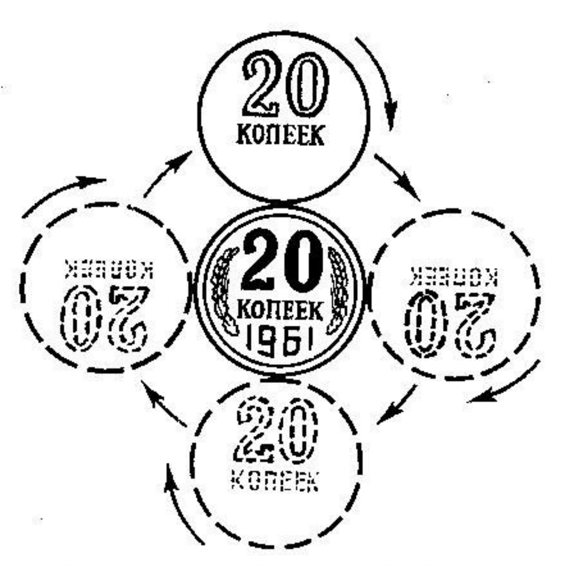
وهكذا فان اقصر وقت يمكن خلاله استنساخ التقرير بواسطة عاملتى الآلة الكاتبة هو ساعة واحدة و ١٢ دقيقة .

كما ويمكن اقتراح حل آخر . فخلال ٦ ساعات كانت عاملة الآلة الكاتبة الاولى تستطيع ان تعيد كتابة التقرير ثلاث مرات ، اما العاملة الثانية فخلال نفس الوقت تستطيع اعادة كتابة التقرير مرتين . هذا يعنى انهما تستطيعان سويا خلال ٦ ساعات اعادة استنساخ التقرير ٥ مرات (اى لاستطاعتا خلال ٦ ساعات استنساخ عدد من الصفحات اكبر مما يوجد فى التقرير) . ولكن عندئذ يلزمهما لاعادة استنساخ التقرير وقتا اقل بخمس مرات من ٦ ساعات اى انه يلزمهما $\frac{٦}{٥}$ = ساعة واحدة و ١٢ دقيقة .

٣٨ ـ اذا ما ظننت ان الترس سيدور ثلاث مرات فانت مخطئ ، فسيدور الترس اربع دورات لا ثلاث .

لكى توضح لنفسك بجلاء فيم الفكرة هنا ضع امامك على ورقة ناعمة قطعتين من النقود ، مثلا قطعتين من فئة ٢٠ كوبيكا كما هو مبين على الشكل ٢٩ . امسك قطعة النقود السفلى ثم مرر على محيطها قطعة النقود العليا . ستلاحظ شيئا غير متوقع . فعندما تقطع قطعة النقود نصف محيط القطعة السفلى وتصبح فى الاسفل ستكون قد دارت دورة كاملة حول محورها ، ويلاحظ هذا من وضع الارقام على قطعة النقود . وبمرورها على قطعة النقود غير المتحركة تلحق قطعة النقود ان تدور دورتين حول القطعة غير المتحركة .

وعموما عندما يتحرك جسم فى دائرة فهو يصنع دورة اكثر مما يمكن ان نعتبر مباشرة . لنفس السبب فان كرتنا الارضية



شكل ٢٩ . قطعة نقدية يمكن ان تعمل بدورانها حول قطعة نقدية اخرى دورتين وليس دورة واحدة

بدورانها حول الشمس تدور حول محورها لا ٣٦٥ مرة وربع ، ولكن ٣٦٦ مرة وربع لو عددنا الدورات لا بالنسبة للشمس ولكن بالنسبة للنجوم . وانت الآن تفهم لماذا يكون اليوم النجمي اقصر من الشمسي .

٣٩ — الحل الحسابي معقد جدا ، ولكن المسألة تحل ببساطة اذا ما استخدمنا امكانيات الجبر وكونا معادلة . سنرمز لعدد السنين الذى نبحث عنه بالحرف س . اما العمر بعد ثلاث سنوات فلابد

وان نرمز له بـ س + ٣ ، اما العمر قبل ثلاث سنوات مضت فسنرمز له بـ س — ٣ . لدينا المعادلة :

$$٣(س + ٣) — ٣(س — ٣) = س$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على ان س = ١٨ . فاذن عمر هاوى الالغاز ١٨ سنة .

لنختبر ذلك : سيكون عمره خلال ثلاث سنوات ٢١ سنة ، اما قبل ثلاث سنوات مضت فقد كان عمره ١٥ سنة . الفرق

$$٣ \times ٢١ — ٣ \times ١٥ = ٦٣ — ٤٥ = ١٨$$

اى يساوى العمر الحالى لهاوى الالغاز .

٤٠ — كما فى المسألة السابقة فان هذه المسألة يمكن ان تحل بواسطة معادلة بسيطة . لو ان عمر الابن الآن س من السنين فان عمر الاب ٢ س . وقبل ثمان عشرة سنة مضت كان عمر كل منهما اقل بـ ١٨ سنة : عمر الاب ٢ س — ١٨ ، وعمر الابن س — ١٨ . عندئذ من المعروف ان الاب كان فى ذلك الوقت اكبر من الابن بثلاث مرات

$$٣(س — ١٨) = ٢ س — ١٨$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على س = ٣٦ : اى ان عمر الابن الآن ٣٦ سنة وعمر الاب ٧٢ سنة .

٤١ – لنفرض انه كان فى القنينة الاولى فى البداية س جم من حامض الكلوريد وكان فى القنينة الثانية س جم من الماء . بعد اول نقل اصبح فى القنينة الاولى (س – ٢٠) جم من الحامض وفى الثانية حامض مع ماء (س + ٢٠) جم . بعد النقل الثانى يتبقى فى القنينة الثانية $\frac{١}{٣}$ (س + ٢٠) جم من السائل اما فى الاولى فسيصبح

$$س - ٢٠ + \frac{٢}{٣} (س + ٢٠) = \frac{٥ س - ٢٠}{٣}$$

بما اننا نعرف انه يوجد فى القنينة الاولى سائل تقل كميته باربع مرات عما فى الثانية ، فان

$$\frac{٤}{٣} (س + ٢٠) = \frac{٥ س - ٢٠}{٣}$$

من هنا ينتج ان س = ١٠٠ ، اى انه كان فى كل قنينة ١٠٠ جم .

٤٢ – سنرمز للعدد الابتدائى للروبلات المنفردة بـ س وعدد قطع النقود من فئة ٢٠ كوبيكا بـ ص . عندئذ كان فى محفظتى عندما ذهبت لشراء المشتريات

(١٠٠ س + ٢٠ ص) كوبيكا

وعندما رجعت ، كان لدى :

(١٠٠ ص + ٢٠ س) كوبيكا

نحن نعرف المبلغ الاخير وهو اصغر من الاول بثلاث مرات ، وبالتالى يكون

٣(١٠٠ ص + ٢٠ س) = ١٠٠ س + ٢٠ ص

وباجراء الاختصارات فى هذه المعادلة نحصل على

س = ٧ ص

اذا كان ص = ١ فان س = ٧ . وبافتراض ذلك فقد كان لدى فى البداية من النقود ٧ روبلات و ٢٠ كوبيكا . وهذا لا يطابق شرط المسألة (« حوالى ١٥ روبلا ») .

فلنجرب ص = ٢ ، عندئذ يكون س = ١٤ . والقيمة الابتدائية تساوى ١٤ روبلا و ٤٠ كوبيكا ، الامر الذى يطابق جيدا شرط المسألة .

ويعطى الافتراض ص = ٣ مبلغا كبيرا جدا للنقود : ٢١ روبلا و ٦٠ كوبيكا .

وبالتالى فالجواب الملائم الوحيد هو ١٤ روبلا و ٤٠ كوبيكا . بعد المشتريات يتبقى روبلان منفردان و ١٤ قطعة من فئة ٢٠ كوبيكا ، اى ان ٢٠٠ + ٢٨٠ = ٤٨٠ كوبيكا وهذا فعلا يؤلف ثلث المبلغ الابتدائى (١٤٤٠/٣ = ٤٨٠) .

وقد تم انفاق ١٤٤٠ — ٤٨٠ = ٩٦٠ . وهذا يعنى ان ثمن المشتريات ٩ روبلات و ٦٠ كوبيكا .

الباب الرابع

هــل تحســـن العـــد ؟

٤٣ ـ هل تحسن العد ؟ ان هذا السؤال ربما يعتبر مهينا بالنسبة لمن تجاوز سنه الثلاث سنوات . من لا يحسن العد ؟ ولكي تقول بالترتيب « واحد » ، « اثنين » ، « ثلاثة » لا يتطلب ذلك مقدرة كبيرة . ولكنه على الرغم من ذلك انى واثق من انكم احيانا لا تقومون جيدا بمثل هذا العمل الذى يبدو بسيطا . والامر يعتمد على ما يلزم عده . وليس من الصعب عد المسامير فى الصندوق . ولكن لنفرض انه لا يوجد فى الصندوق مسامير فقط ولكن مسامير وقلاووظات مختلطة ببعضها البعض . وتلزم معرفة كم هناك من هذا وذاك على حدة . ما الذى ستفعلة عندئذ ؟ ستضع المسامير بمفردها والقلاووظات بمفردها ومن ثم تعد كلا منها ؟

مثل هذه المسألة تقابل ربة البيت ايضا عندما تعد الملابس للغسيل . تضع اولا الملابس حسب النوع : الجاكيتات فى كومة والفوط فى كومة ثانية ، واكياس الوسائد فى كومة ثالثة .. الخ

وبعد ان تنتهى من هذه العملية الشاقة تبدأ فى عد كم قطعة فى كل كومة .

هذا هو ما يسمى بعدم اجادة العد ! لان مثل هذه الطريقة لعد الاشياء غير المتجانسة غير مريح بتاتا ويتطلب عمل الكثير ولحد ما لا يمكن تحقيقه فى بعض الحالات . حسنا ، اذا من اللازم عليكم ان تعدوا مسامير او ملابس : فيمكن توزيعها على اكوام . ولكن ضع نفسك مكان عامل الغابة ، الذى يجب عليه ان يعد كم ينمو على الهكتار الواحد من اشجار الصنوبر وكم ينمو على نفس الرقعة من اشجار الشوح وكم من اشجار البتولا وكم من اشجار الحور . فى هذه الحالة لا يمكن تقسيم الاشجار حسب النوع وتجميعها مقدما حسب السلالة . وما الذى تبدأ عده اولا هل هى اشجار الصنوبر ثم اشجار الشوح ثم اشجار البتولا ثم اشجار الحور ؟ اربع مرات تمر على نفس المساحة من الارض ؟

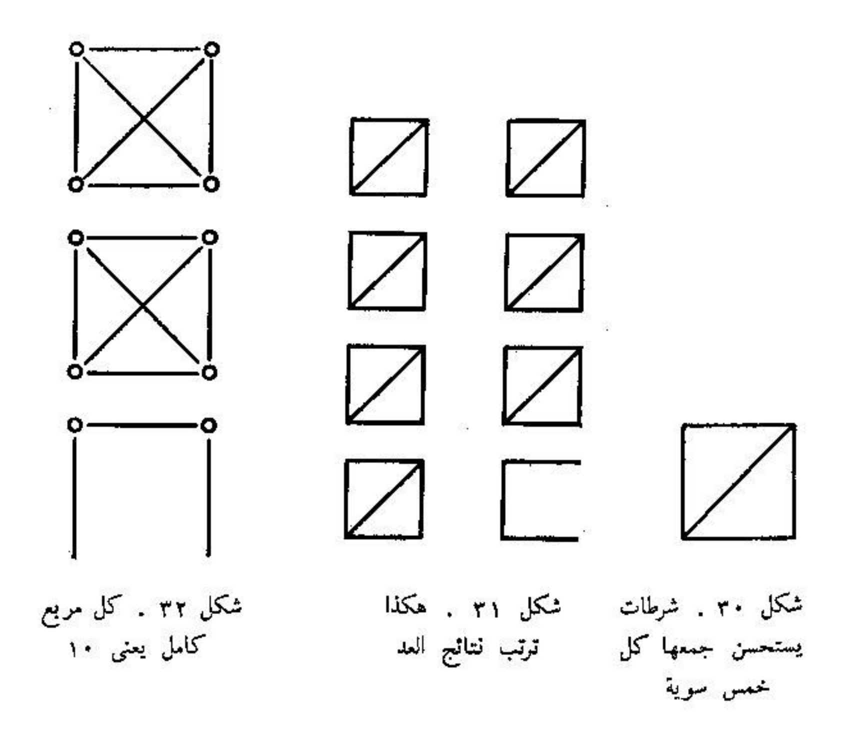
الا توجد طريقة لعمل ذلك بصورة اسهل بحيث تمر على رقعة الارض مرة واحدة ؟ نعم ، توجد مثل هذه الطريقة يستخدمها عمال الغابات منذ زمن بعيد . سأريك فيم تنحصر هذه الطريقة على مثال عد المسامير والقلاووظات .

لكى نعد كم فى العلبة من مسامير وقلاووظات مرة واحدة دون ان نقسمها فى البداية حسب انواعها ، خذ معك قلم رصاص وورقة مقسمة كالآتى

قلاووظات	مسامير

بعد ذلك ابدأ العد . خذ من العلبة كل ما يقع فى يدك اولا . فاذا كان مسمارا فتؤشر على الورقة بشرطة فى مكان المسامير ، اذا كان قلاووظا فتؤشر بشرطة فى مكان القلاووظات . خذ القطعة الثانية وافعل نفس الشىء . خذ ثالث قطعة .. الخ الى ان يخلو الصندوق تماما . فى نهاية العد سيكون على الورقة فى خانة المسامير عددا من الشرطات يساوى عدد المسامير التى كانت موجودة فى الصندوق وفى خانة القلاووظات عدد من الشرطات يساوى عدد القلاووظات . يبقى فقط حصر الشرطات التى على الورقة .

ويمكن تبسيط عد الشرطات واسراعه اذا لم نضعها ببساطة واحدة بجانب الاخرى بل جمعناها كل خمس سوية ، وعلى سبيل المثال بالاشكال المبينة على الشكل ٣٠ . من الافضل تجميع المربعات من هذا الشكل فى ازواج اى بعد اول ١٠ شرطات نضع الشرطة الحادية عشرة فى سطر جديد ، وعندما يتكون مربعان فى السطر الثانى نبدأ المربع التالى فى السطر الثالث .. الخ . وستوضع الشرطات عندئذ تقريبا فى نظام كالمبين على الشكل ٣١ .



شكل ٣٠ . شرطات يستحسن جمعها كل خمس سوية

شكل ٣١ . هكذا ترتب نتائج العد

شكل ٣٢ . كل مربع كامل يعنى ١٠

ان تعداد الشرطات الموضوعة بهذه الطريقة سهل جدا : فانت ترى مباشرة انه توجد هنا ثلاث عشرات كاملة ، وخمسة واحدة وثلاث شرطات ايضا اى ان المجموع ٣٠ + ٥ + ٣ = ٣٨ .

ويمكن استخدام اشكال من نوع آخر ، ومثلا تستخدم فى كثير من الاحيان العلامات حيث يرمز كل مربع كامل لعشرة (شكل ٣٢) .

ويجب عليك عند حساب الاشجار مختلفة الانواع على مساحة معينة من الغابة ان تفعل نفس الشيء ولكن سيكون لديك على الورقة لا خانتين وانما اربع خانات . ومن الافضل هنا الا تكون لدينا خانات رأسية وانما افقية . وقبل العد تحمل الورقة الشكل المبين على الشكل ٣٣ .

فى نهاية العد يتكون على الورقة تقريبا ما هو مبين على الشكل ٣٤ .

ومن السهل جدا فى هذه الحالة ان نحصل على النتيجة النهائية

اشجار الصنوبر ٥٣ ، اشجار البتولا ٤٦
اشجار الشوح ٧٩ ، اشجار الحور ٣٧

ويمكن لربة البيت ان تفعل نفس الشيء لدى وضع قائمة بالملابس اللازم غسلها فتختصر الجهد والوقت .

اذا كان يلزمنا ، مثلا ، معرفة انواع المزروعات وكم عددها على رقعة صغيرة من المرعى فانت الآن على معرفة بطريقة حل هذه المسألة فى اقصر وقت ممكن . تكتب على ورقة مسبقا اسماء المزروعات التى لاحظتها مع ابقاء خانة لكل نوع وتترك عدة خانات احتياطية للمزروعات التى قد تصادفك ايضا . ستبدأ العد مثلا بورقة كالمبينة على الشكل ٣٥ .

اشجار الصنوبر	
اشجار الشوح	
اشجار البتولا	
اشجار الحور	

شكل ٣٣ . جدول لعد الاشجار فى الغابة

اشجار الصنوبر	
اشجار الشوح	
اشجار البتولا	
اشجار الحور	

شكل ٣٤ . شكل الجدول بعد عملية العد

سن الاسد	
ورد الحب	
مزمار الراعى	
زنبق الوادى	
زهرة القرون	

شكل ٣٥ . كيف يجب البدء فى عد المزروعات فى منطقة المرج

بعد ذلك يجب القيام بنفس ما صنعناه عند عد الاشجار فى مساحة
معينة من الغابة .

٤٤ — لماذا تعد اشجار الغابة ؟ يبدو هذا لسكان المدينة
عملية غير ممكنة . وفى رواية ليف تولستوى « آنا كارينينا » يسأل
ليفين خبير الاقتصاد الزراعى قريبه الذى لا يعرف شيئا عن هذا
والذى يعتزم بيع غابة :

— هل عددت الاشجار ؟

ويجيب هذا باستغراب :

— كيف تعد الاشجار ؟ عد الرمال ، اشعة الكواكب على
الرغم من انه يمكن ان يقوم به عقل كبير ...

— حسنا ، ولكن العقل الكبير لريبينين (التاجر) يستطيع ذلك
ولن يشترى اى فلاح شيئا دون ان يعد .

يجرى تعداد الاشجار فى الغابة لكى يحدد عدد الامتار المكعبة
من الخشب فيها . ولا تعد اشجار الغابة كلها ولكن يعد جزء معين
مساحته ربع او نصف هكتار يجرى اختياره بحيث يكون تكوين
وكثافة وسمك وارتفاع اشجاره ذات معدل متوسط بالنسبة لهذه
الغابة . وللاختيار الصحيح لمثل هذه « المساحة التجريبية » يجب
بالطبع ، ان تكون لديك عين خبيرة . وعند العد لا يكفى تحديد
عدد الاشجار من كل نوع ، ولكن يلزم ايضا معرفة عدد الجذوع
ذات السمك المعين : كم منها ذات سمك ٢٥ سم وكم ذات

سمك ٣٠ سم وكم ذات سمك ٣٥ سم .. الخ . ولذلك من الضرورى ان يوجد فى الكشف اكثر من اربع خانات حتى فى حالتنا المبسطة . ويمكن ان تتخيل الآن كم عدد المرات كان يجب ان نجول الغابة لو اننا عددنا الاشجار بالطريقة العادية وليس كما هو وارد هنا .

وكما ترى يكون العد عملية سهلة وبسيطة فقط عند عد الاشياء المتجانسة . اما اذا كان لابد من معرفة عدد اشياء غير متجانسة فيلزم استعمال الطرق الخاصة التى بيناها توا والتى لا يعرف الكثيرون بوجودها .

الباب الخامس

ألغـــاز عدديـــة

٤٥ ـ مائة روبل مقابل خمسة روبلات . قدم احد العدادين المسرحيين فى احدى حفلاته للمشاهدين الاقتراح المغرى التالى :

ـ اعلن امام المشاهدين اننى سأدفع ١٠٠ روبل لكل من يعطينى ٥ روبلات بعشرين قطعة من فئة ٥٠ ، ٢٠ و ٥ كوبيكات . مائة روبل مقابل خمس ! من يرغب ؟

خيم السكون على القاعة .

وغرق المشاهدون فى التفكير . وجرت الاقلام على صفحات المفكرات ، ولكن لم يصل اى اقتراح جوابى .

ـ أرى ان المشاهدين يجدون ان ٥ روبلات مبلغ كبير جدا لاخذ ١٠٠ روبل . فلتسمحوا لى ان اخصم روبلين واحدد سعرا منخفضا هو ٣ روبلات بعشرين قطعة من الفئات المذكورة . ادفع ١٠٠ روبل مقابل ثلاثة روبلات ! ليقف الراغبون فى طابور !

ولكن لم يقف احد فى الطابور . لقد ابطأ المتفرجون فى استغلال هذه المناسبة النادرة .

– أمن المعقول ان تكون ثلاثة روبلات مبلغا كبيرا ! حسنا ، سأخصم من المبلغ روبلا آخر ، ادفعوا بالعشرين قطعة المبينة روبلين فقط وسأعطيكم حالا مائة روبل .

بما انه لم يبد احد استعداده للمقايضة ، فقد استطرد العداد يقول :

– قد تكون معكم نقود من فئات صغيرة ؟ لا تخجلوا من ذلك ، سأصدقكم واعتبرها سلفة . اعطونى فقط على ورقة كم من القطع من كل نوع ستتكفلون باعطائها لى .

٤٦ – الالف . هل تستطيع ان تعبر عن العدد ١٠٠٠ بثمانية ارقام واحدة ؟

يسمح عند ذلك بالاضافة الى الارقام باستخدام علامات العمليات المختلفة .

٤٧ – اربع وعشرون . من السهل جدا ان نعبر عن العدد ٢٤ بثلاث ثمانيات ٨ + ٨ + ٨ . ولكن هل تستطيع ان تفعل نفس الشيء لا باستخدام الثمانيات وانما باستخدام ثلاث ارقام اخرى متساوية ؟ للمسألة عدة حلول .

٤٨ – ثلاثون . من السهل التعبير عن العدد ثلاثين بثلاث خمسات ٥ × ٥ + ٥ . والاصعب من ذلك ان نجريه باعداد متساوية اخرى .

جرب ، قد تستطيع ان تجد عدة حلول ؟

٤٩ – الارقام الناقصة . فى هذا المثال عن الضرب استبدل اكثر من نصف الارقام بنجوم :

```
   *١*
 × ٣*٢
 ------
   *٣*
  ٣*٢*
 *٢*٥
 ------
 ١*٨*٣٠
```

هل تستطيع ان تضع الارقام الناقصة ؟

٥٠ ــ ما هى الاعداد ؟ اليكم مسألة اخرى من هذا النوع .
المطلوب تحديد ، الاعداد التى تضرب فى المثال التالى :

```
    **٥
  × ١**
  ------
   ٢**٥
  ١٣*٠
 ***
 ------
 ٤*٧٧*
```

٥١ ــ ما الذى قسمناه ؟ ضع الارقام الناقصة فى مثال القسمة الآتى :

```
  *٢*٥* | ٣٢٥
- ***   |-----
  ----- | ١**
  *٠**
- *٩**
  -----
    *٥*
-   *٥*
```

٥٢ ـ القسمة على ١١ . اكتب اى عدد مؤلف من تسعة ارقام بحيث لا توجد فيه ارقام مكررة (كل الارقام مختلفة) ، والذى يقسم بدون باق على ١١ .

اكتب اكبر هذه الاعداد .

اكتب اصغر هذه الاعداد .

٥٣ ـ حالات غريبة لعملية الضرب . فلتنظروا الحالة الآتية لضرب عددين :

$$٤٨ \times ١٥٩ = ٧٦٣٢$$

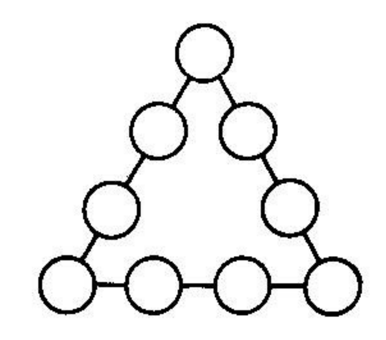
فهى مثيرة لانه تشترك فيها مرة واحدة كل الارقام التسعة .

هل تستطيعون اختيار عدة امثلة كهذا المثال ؟ وكم عددها اذا كانت توجد عموما ؟

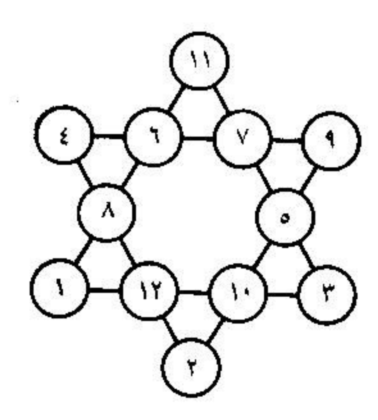
٥٤ ـ المثلث العددى . فى دوائر هذا المثلث (شكل ٣٦) ضع كل الارقام التسعة بحيث يكون مجموعها على كل جهة يساوى ٢٠ .

٥٥ ـ مثلث عددى آخر . ضع الاعداد فى دوائر نفس المثلث (شكل ٣٦) بحيث يكون مجموع كل جانب مساويا لـ ١٧ .

٥٦ ـ النجمة السحرية . للنجمة العددية ذات الستة رؤوس المبينة على الشكل ٣٧ خاصية « سحرية » : فان جميع الصفوف الستة للاعداد يكون لها نفس المجموع :



شكل ٣٦ . ضع فى الدوائر تسعة ارقام



شكل ٣٧ . نجمة عددية ذات ستة رؤوس

٤ + ٦ + ٧ ÷ ٩ = ٢٦   ١١ + ٦ + ٨ + ١ = ٢٦

٤ + ٨ + ١٢ + ٢ = ٢٦   ١١ + ٧ + ٥ + ٣ = ٢٦

٩ + ٥ + ١٠ + ٢ = ٢٦   ١ + ١٢ + ١٠ + ٣ = ٢٦

ولكن مجموع الاعداد الموضوعة على رؤوس النجمة مختلف :

٤ + ١١ + ٩ + ٣ + ٢ + ١ = ٣٠

الا تستطيعون من تحسين هذه النجمة بحيث تضع الاعداد فى الدوائر بشكل يجعل الصفوف الستة ذات مجموع واحد (٢٦) وكذلك مجموع الأعداد على رؤوس المثلث يساوى نفس المجموع الاول (٢٦) ؟

حل الالغاز ٤٥ ـ ٥٦

٤٥ ـ ان كل المسائل الثلاث الغير قابلة للحل ، كان العداد يستطيع ان يعد باعطاء اى جائزة لحلها . لكى نتأكد من ذلك نستعين بعلم الجبر وسننظر المسائل واحدة تلو الاخرى .

دفع الـ ٥ روبلات . لنفرض ان الدفع ممكن ، ومن اجل ذلك لزم س قطعة من فئة ٥٠ كوبيكا ، و ص قطعة من فئة ٢٠ كوبيكا وع قطعة من فئة ٥ كوبيكات ، عندئذ تكون لدينا المعادلة :

٥٠ س + ٢٠ ص + ٥ ع = ٥٠٠

بالاختصار على ٥ نحصل على :

١٠ س + ٤ ص + ع = ١٠٠

بالاضافة الى ذلك ، بما ان العدد الكلى للقطع النقدية تبعا للشرط يساوى ٢٠ ، فان س ، ص وع مرتبطة ببعضها بمعادلة اخرى :

س + ص + ع = ٢٠

بطرح هذه المعادلة من المعادلة الاولى ، نحصل على :

٩ س + ٣ ص = ٨٠

وبقسمتها على ٣ ، نوصل المعادلة الى الشكل :

٣ س + ص = ٢٦ $\frac{٢}{٣}$

ولكن ٣ س ـ العدد الثلاثي للقطع النقدية من فئة الـ ٥٠ كوبيكا هو بلا شك عدد صحيح . كما ان عدد القطع النقدية من فئة الـ ٢٠ كوبيكا ص هو عدد صحيح ايضا . ولكن مجموع عددين صحيحين لا يمكن ان يكون كسرا ($\frac{٢}{٣}$ ٢٦) . وافتراضنا ان هذه المسألة قابلة للحل ، يؤدي كما نرى الى المستحيل ، وهذا يعني ان المسألة غير قابلة للحل .

بنفس الطريقة يستطيع القارئ ان يتأكد من ان المسألتين الاخريين « الرخيصتين » غير قابلتين للحل ايضا : عند دفع ٣ روبلات وروبلين . الاولى توصل الى المعادلة :

$$٣ \text{ س} + \text{ص} = ١٣ \frac{١}{٣}$$

وتؤدي الثانية الى المعادلة :

$$٣ \text{ س} + \text{ص} = ٦ \frac{٢}{٣}$$

وكلتاهما لا تحلان بالاعداد الصحيحة .

وكما ترون فان العداد لم يغامر بتاتا عندما اقترح مبالغ ضخمة لحل هذه المسائل . ولن يتم منح المكافات ابدا .

اما اذا كان قد طلب ان يدفع بعشرين قطعة نقدية ذات الفئة المذكورة ليس ٥ روبلات وليس ٣ ولا روبلين ولكن ٤ روبلات مثلا ، فعندئذ تحل المسالة بسهولة بسبع طرق مختلفة * .

---

* ان احد الحلول الممكنة هو : ٦ قطع من فئة ٥٠ كوبيكا وقطعتان من فئة عشرين كوبيكا و ١٢ قطعة من فئة ٥ كوبيكات .

٤٦ – ٨٨٨ + ٨٨ + ٨ + ٨ + ٨ = ١٠٠٠

وتوجد حلول اخرى .

٤٧ – اليك هذين الحلين :

٢٢ + ٢ = ٢٤ ، ٣^٣ – ٣ = ٢٤

٤٨ – نورد ثلاثة حلول :

٦ × ٦ – ٦ = ٣٠ ، ٣^٣ + ٣ = ٣٠ ، ٣٣ – ٣ = ٣٠

٤٩ – تكمل الاعداد الناقصة تدريجيا اذا التزمنا بالاسلوب التالى فى التفكير .

وللسهولة سنضع ارقاما للاسطر :

I	*١*	
II	٣*٢	×
III	*٣*	
IV	٣*٢*	
V	*٢*٥	+
VI	١*٨*٣٠	

من السهل ادراك ان آخر نجمة فى السطر III هو الرقم الصفر : هذا واضح من ان الصفر يوجد فى آخر السطر VI .

والآن نحدد قيمة النجمة الاخيرة للسطر الاول I : هذا الرقم الذى يعطى من ضربه فى ٢ عددا ينتهى بصفر ، ويعطى من ضربه فى ٣ عددا ينتهى بـ ٥ (السطر V) . ولا يمكن ان يكون هذا الرقم سوى ٥ .

وواضح بعد ذلك انه فى نهاية السطر IV يوجد الرقم صفر . (قارن الارقام الواقعة فى المكان الثانى من النهاية فى السطور III و VI !) .

ومن السهل معرفة ما الذى يختفى تحت النجمة فى السطر II : ٨ ، لان ٨ فقط تعطى عندما تضرب فى العدد ١٥ النتيجة التى تنتهى بـ ٢٠ (السطر IV) .

وفى النهاية تصبح واضحة قيمة النجمة الاولى فى السطر I : انه الرقم ٤ ، لان ٤ فقط تعطى عند ضربها فى ٨ النتيجة التى تبدأ بـ ٣ (السطر IV) ومعرفة بقية الارقام الآن لا تمثل اى صعوبة ، فيكفى ضرب الاعداد فى السطرين الاولين اللذين تم تحديدهما الآن .

فى النهاية نحصل على مثال الضرب الآتى :

```
  ٤١٥  ×
  ٣٨٢
 -----
  ٨٣٠
 ٣٣٢٠   +
١٢٤٥
-------
١٥٨٥٣٠
```

٥٠ — وبنفس الطريقة التى اوردناها فى المثال السابق يمكن تحديد قيمة النجوم فى الحالة هذه .

نحصل على :

```
   ٣٢٥ ×
   ١٤٧
  ─────
  ٢٢٧٥
 ١٣٠٠   +
 ٣٢٥
 ──────
 ٤٧٧٧٥
```

٥١ ـ واليك حالة القسمة المطلوبة :

```
 ـ ٥٢٦٥٠ | ٣٢٥
   ٣٢٥   | ١٦٢
  ───────
 ـ ٢٠١٥
   ١٩٥٠
  ───────
 ـ   ٦٥٠
     ٦٥٠
  ───────
```

٥٢ ـ لحل هذه المسألة تلزم معرفة شرط القسمة على ١١ . يقسم العدد على ١١ اذا كان الفرق ما بين مجموع الارقام الواقعة فى الاماكن الزوجية ومجموع الارقام الواقعة فى الاماكن الفردية يقسم على ١١ او يساوى الصفر . فلنختبر ، على سبيل المثال ، العدد ٢٣٦٥٨٩٠٤ .

مجموع الارقام التى فى الاماكن الزوجية :

٣ + ٥ + ٩ + ٤ = ٢١

ومجموع الارقام التى فى الاماكن الفردية :

٢ + ٦ + ٨ + ٠ = ١٦

الفرق بينهما (يلزم طرح الاصغر من الاكبر) يساوى :

٢١ ـ ١٦ = ٥

هذا الفرق (٥) لا يقسم على ١١ وهذا يعنى ان العدد الذى اخذناه لا يقسم بدون باقى على ١١ .

فلنجرب عددا آخر ٧٣٤٤٥٣٥ ؛

٣ + ٤ + ٣ = ١٠ ، ٧ + ٤ + ٥ + ٥ = ٢١ ، ٢١ ـ ١٠ = ١١

بما ان ١١ تقسم على ١١ اذن فالعدد المختار من مضاعفات ١١ .

والآن من السهل ان نعرف كيف يمكن كتابة الارقام التسعة لكى نحصل على عدد مكرر لـ ١١ ويحقق متطلبات المسألة :

وعلى سبيل المثال : ٣٥٢٠٤٩٧٨٦

نجرب ٣ + ٢ + ٤ + ٧ + ٦ = ٢٢ ، ٥ + ٠ + ٩ + ٨ = ٢٢

الفرق ٢٢ ـ ٢٢ = صفر . وهذا يعنى ان العدد المختار من مكررات الـ ١١ .

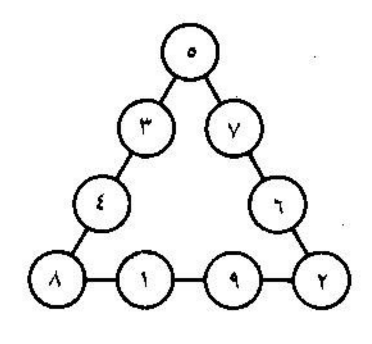
ان اكبر عدد من هذه الاعداد هو : ٩٨٧٦٥٢٤١٣

واصغرها : ١٠٢٣٤٧٥٨٦ .

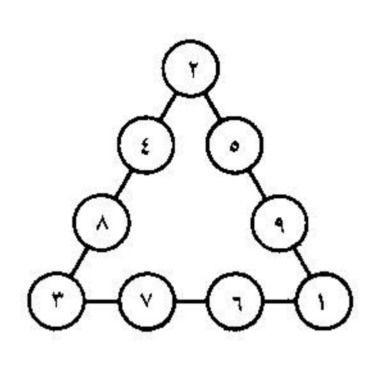
٥٣ ـ يستطيع القارئ الصبور ان يجد تسع حالات لمثل هذا الضرب وهى كالآتى :

١٢ × ٤٨٣ = ٥٧٩٦ ، ٤٨ × ١٥٩ = ٧٦٣٢

٤٢ × ١٣٨ = ٥٧٩٦ ، ٢٨ × ١٥٧ = ٤٣٩٦



شكل ٣٨



شكل ٣٩

٥٣٤٦ = ٢٩٧ × ١٨ ،

٥٣٤٦ = ١٩٨ × ٢٧ ،

٧٢٥٤ = ١٨٦ × ٣٩ ،

٦٩٥٢ = ١٧٣٨ × ٤

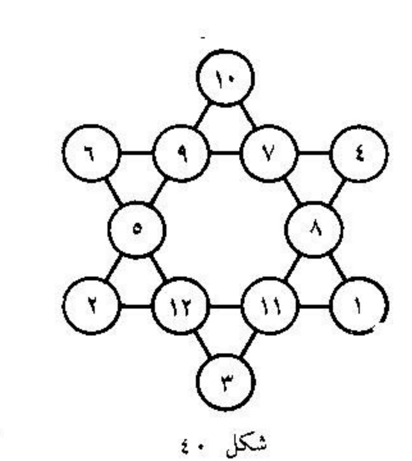
٧٨٥٢ = ١٩٦٣ × ٤

٥٤ ــ ٥٥ . الحلول مبينة على الشكلين ٣٨ و ٣٩ المرفقة . يمكن اعادة وضع الارقام المتوسطة لكل صف مكان بعضها البعض الآخر ، وبالتالى نحصل على مجموعة حلول اخرى .

٥٦ ــ لتسهيل ايجاد الوضع المناسب للاعداد سنتبع المفاهيم الآتية .

ان مجموع الاعداد على اطراف النجمة المطلوبة يساوى ٢٦ ، ومجموع كل اعداد النجمة ٧٨ . هذا يعنى ان مجموع الاعداد لسداسى الاضلاع الداخلى يساوى ٧٨ ــ ٢٦ = ٥٢ .

لنبحث بعد ذلك احد المثلثات الكبيرة . مجموع اعداد كل من اضلاعه يساوى ٢٦ ، فلنجمع اعداد كل الاضلاع الثلاثة — نحصل على ٢٦ × ٣ = ٧٨ ، مع العلم ان كلا من الاعداد التى فى الزوايا يتكرر مرتين . وبما ان مجموع اعداد الازواج الثلاثة



شكل ٤٠

الداخلية (اى مجموع الاعداد لسداسى الاضلاع الداخلى) يجب ، ونحن نعرف ذلك ، ان يساوى ٥٢ ، فان المجموع المضاعف للاعداد على رؤوس كل مثلث يساوى ٧٨ — ٥٢ = ٢٦ ، اما المجموع مرة واحدة = ١٣ .

ولقد ضاق مجال البحث الآن كثيرا . فنحن نعرف ، مثلا ، ان لا ١٢ و لا ١١ لا يمكن ان تحتل اماكن فى رؤوس النجمة (لماذا ؟) . وهذا يعنى انه يمكن بدأ التجارب من ١٠ بحيث يتحدد مرة واحدة العددان اللذان يجب ان يحتلا رأسى المثلث الآخرين : ١ و ٢ .

وبمواصلة السير قدما بهذه الطريقة يمكن لنا فى النهاية ايجاد الوضع المطلوب . وهذا الوضع مبين على الشكل ٤٠ .

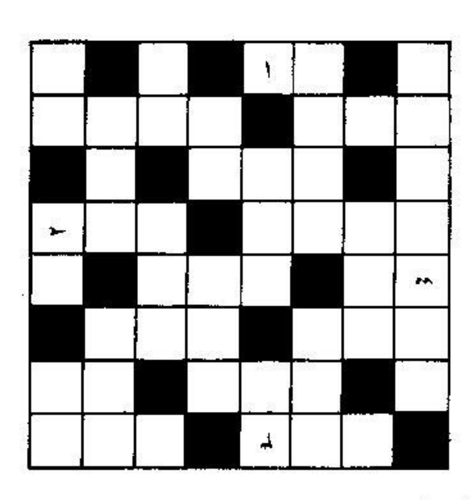
الباب السادس

المراسلـــــة بالشفـــرة

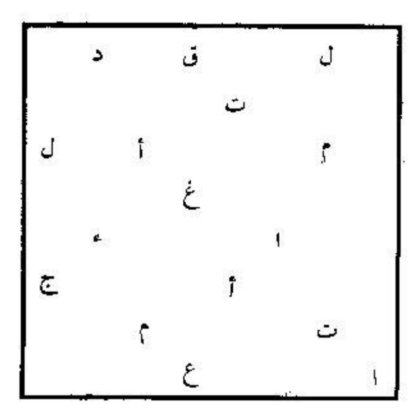
٥٧ ـ الشبكة . يضطر الثورى الذى يمارس العمل السرى ان يكتب كتاباته ورسائله مع الرفاق بحيث لا يستطيع احد آخر ان يفهم ما هو المكتوب . من اجل ذلك تستخدم طريقة خاصة للكتابة تسمى « بالكتابة السرية » (او « الكريبتوجرافيا ») . توجد اساليب مختلفة للكتابة السرية ويستخدمها ليس الذين يعملون فى العمل السرى فقط ولكن ايضا الديبلوماسيون والعسكريون للمحافظة على اسرار الدولة . وسنتحدث بعد ذلك عن احدى طرق الكتابة السرية ، وبالذات تلك المسماة بطريقة « الشبكة » . هذه الطريقة تنتمى الى الطرق البسيطة نسبيا ومرتبطة ارتباطا قويا بالحساب .

يجب على الافراد الذين يريدون ان يمارسوا الكتابة السرية بهذه الطريقة ان يتزودوا بـ « شبكة » ، وهى عبارة عن مربع ورقى حفرت عليه مربعات .

وترون نموذج الشبكة على الشكل ٤١ . وتوضع الفتحات لا بطريق عشوائى ، ولكن بنظام معين سيتضح لكم فيما بعد .



شكل ٤١ . شبكة للكتابة السرية (اعمل مثل هذه الشبكة من الورق واقرأ الكتابة السرية على الشكل ٤٥)



شكل ٤٢ .برفع الشبكة نرى الكتابة

	د	م	ق		م	ل	
			ل	ت			ث
ل	أ	أ			ى	م	
ن			غ	م			ل
	ء	ق			ا	ط	
ج			ة	أ			
	د	م			ق	ت	ل
ح			ع				ا

شكل ٤٣ . نكتب بعد ذلك الـ ١٦ حرفا التالية

لنفرض ان المطلوب ارسال الرسالة التالية الى رفيق : لقد تم الغاء اجتماع ممثلي المنطقة . لقد حذر احدهم دائرة البوليس . الرفيق انطون .

يضع الكاتب الشبكة على قطعة ورق ، ويكتب الرسالة حرفا بعد حرف فى فتحات الشبكة . بما ان عدد الفتحات ١٦ ، فاولا يكتب فقط جزء من الرسالة : لقد تم الغاء اجتماع ...
وعندنزع الشبكة ، نرى الكتابة المبينة على الشكل ٤٢ .

ومن الواضح انه لا يوجد هنا اى شيء سرى بعد ، ويمكن لاى فرد ان يفهم ببساطة الكلام المكتوب . ولكن هذه هى البداية فقط . لن تبقى الرسالة على هذا الشكل . المختفى يدير الشبكة فى اتجاه عقرب الساعة بربع دورة ، اى يضعها على نفس قطعة الورق بحيث ان العدد ٢ الذى كان سابقا فى الجنب ، يكون الآن الى اعلى . عند الوضع الجديد للشبكة تكون جميع الحروف المكتوبة سابقا مغطاة ، اما فى الفتحات فتظهر ورقة بيضاء . تكتب فى هذه الفتحات الـ١٦ حرفا التالية من البرقية السرية. ولو اننا نزعنا الشبكة عندئذ لحصلنا على الكتابة المبينة على الشكل ٤٣ . هذه الكتابة لن يفهمها ليس فقط الانسان الخارجى بل ونفس من كتبها لو انه نسى نص رسالته .

ولكن مكتوب الآن فقط نصف الرسالة وبالذات : لقد تم الغاء اجتماع ممثلي المنطقة . لقد حـ ...

	ل	م	ذ	ق	م	د	ر
ث		أ	ت	ل		ح	
د	م	ى		ه	أ	أ	ل
ل	م		م	غ	د		ن
	ط	ا	ا		ق	ء	
ة		ر	أ	ة		ة	ج
ل	ت	ق		أ	م	د	
ا	ل		ب	ع		و	ح

شكل ٤٤ . يجب من جديد ادارة الشبكة

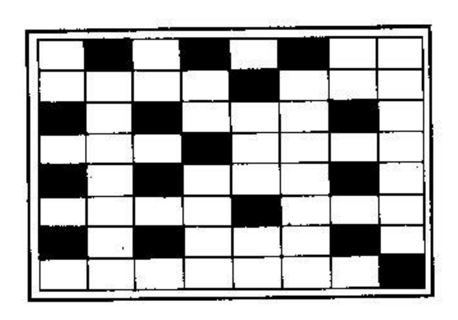
ل	ل	م	ذ	ق	م	د	ر
ث	ى	أ	ت	ل	س	ح	ا
د	م	ى	ل	ه	أ	أ	ل
ل	م	ر	م	غ	د	ف	ن
ى	ط	ا	ا	ق	ق	ء	ا
ة	ن	ر	أ	ة	ط	ة	ج
ى	ت	ق	و	أ	م	د	ن
ا	ل	أ	ب	ع	ب	و	ح

شكل ٤٥ . الكتابة السرية جاهزة

للكتابة ما بعد ذلك ، تلزم ادارة الشبكة بمقدار ربع دورة فى اتجاه عقرب الساعة . ستغطى كل ما هو مكتوب ويظهر ١٦ مربعا خاليا . وتجد لها مكانا فى هذه المربعات عدة كلمات اخرى ، وتأخذ الرسالة الشكل المبين على الشكل ٤٤ .

وفى النهاية يعمل الدوران النهائى بحيث يكون العدد ٤ الى اعلى ويكتب فى الـ ١٦ مربعا البيضاء نهاية الرسالة . اذا اتضح ان هناك مربعات خالية فيكتب فيها أ ب ت .. حتى لا تكون فى الرسالة فراغات وتأخذ الرسالة الشكل المبين على الشكل ٤٥ .

فلتحاول ان تعرف اى شىء من هذا الشكل . ولتقع الرسالة فى يد البوليس ويشتبه البوليس فى امرها قدر ما يريد ، فى انها تحتوى على شىء هام ، فلا يمكن ان يعرف مكنون الرسالة الا الشخص



شكل ٤٦ . شبكة على شكل كارت بريدى

المرسلة اليه فقط الذى يمتلك مثل تلك الشبكة التى استخدمها المرسل بالضبط .

كيف سيقرأ المرسل اليه هذه الرسالة السرية ؟ سيضع شبكته على الرسالة بحيث يكون الرقم ١ الى اعلى ويكتب تلك الحروف التى تظهر فى الفتحات وستكون هذه هى ال ١٦ حرفا الاولى من الرسالة. ثم يدير الشبكة فتظهر امامه ال ١٦ حرفا التالية . وبعد ان يدير الشبكة للمرة الرابعة ستكون الرسالة كلها قد قرأت . يمكن ان تستخدم بدلا من الشبكة المربعة شبكة مستطيلة على شكل كارت بريدى ذى فتحات عريضة (شكل ٤٦) تكتب فيها اجزاء الكلمات وليس الحروف فقط ، وفى بعض الاحيان كلمة كاملة لو امكن وضعها فى الفتحة .

لا تفكر ان الكتابة ستكون فى هذه الحالة ممكنة القراءة اكثر

مما فى الطريقة الاولى . كلا البتة ، على الرغم من ان مقاطع بل كلمات كاملة منها واضحة ولكنها مختلطة فى ترتيب غير معقول بحيث ان السر يبقى فى حرز حريز . وتوضع الشبكة المستطيلة اولا بحيث يكون احد جوانبها الى اعلى ، ثم العكس ، وبعد ذلك تدار فى الاتجاه الايسر ثم يستخدمونها فى الوضعين مرة اخرى . وفى كل وضع جديد تغطى الشبكة كل ما كان مكتوبا سابقا . ولو كان من الممكن استخدام شبكة واحدة فان طريقة الكتابة بواسطتها لم تكن لتنفع من حيث السرية . فقد توجد فى ايدى البوليس هذه الشبكة الواحدة وينكشف السر بسرعة . ولكن المسألة فى ان عدد الشبكات المختلفة كبير جدا .

١	٥	٩	١٣	٤	٣	٢	١
٢	٦	١٠	١٤	٨	٧	٦	٥
٣	٧	١١	١٥	١٢	١١	١٠	٩
٤	٨	١٢	١٦	١٦	١٥	١٤	١٣
١٣	١٤	١٥	١٦	١٦	١٢	٨	٤
٩	١٠	١١	١٢	١٥	١١	٧	٣
٥	٦	٧	٨	١٤	١٠	٦	٢
١	٢	٣	٤	١٣	٩	٥	١

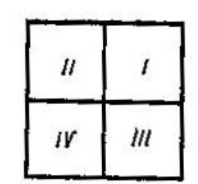
شكل ٤٧ . اكثر من اربعة ملايارات شبكة سرية فى كل مربع

يبين الشكل ٤٧ جميع الشبكات التى يمكن ان تصنع للمربع المؤلف من ٦٤ خلية . وتستطيع ان تختار للفتحات اى ١٦ مربعا ، بحيث تأخذ بعين الاعتبار ان يكون عدد المربعات المختارة ليس اكثر من اثنين ذى رقم واحد . وفى الشبكة التى استخدمناها الآن ، اخذت الارقام الآتية للخلايا

٢ ، ١٣ ، ٥
٨
١٠ ، ١١ ، ٣
١٦
١٢ ، ١٤
١٥ ، ٩
٦ ، ٧
١ ، ٤

وكما ترى فانه لا يتكرر اى رقم .

من السهل تفهم نظام وضع الارقام فى المربع (شكل ٤٧) . فهو يقسم الى خطوط عرضية الى اربع مربعات اصغر يرمز لها للتسهيل بالحروف الرومانية I و II و III و IV (شكل ٤٨) . فى المربع I رقمت المربعات فى تسلسل عادى . والمربع II — هو نفس المربع I لكنه يدار فقط بمقدار ربع دورة الى اليمين . وبادارته



شكل ٤٨ . رسم تخطيطى لتوضيح الشكل ٤٧

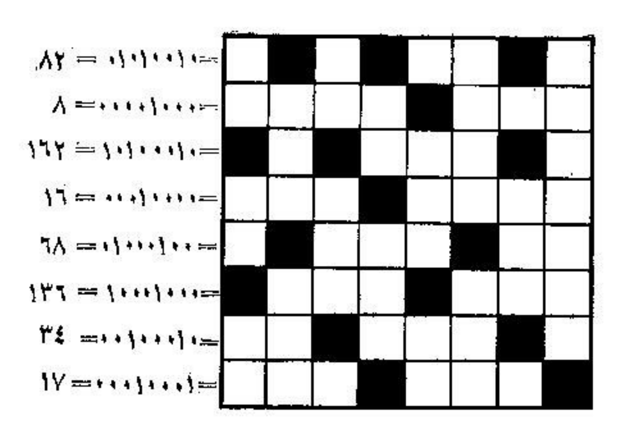
ربع دورة اخرى نحصل على المربع III ، وعند ادارته بمقدار ربع دورة اخرى نحصل على المربع IV .

فلنحسب الآن رياضيا كم يمكن ان يكون عدد الشبكات المختلفة . الخلية رقم ١ يمكن ان تؤخذ (كفتحة) فى اربع اماكن . وفى كل حالة يمكن توصيل الخلية رقم ٢ باخذها ايضا فى ٤ اماكن . وبالتالى يمكن تحديد فتحتين بـ ٤ × ٤ اى بـ ١٦ طريقة . وثلاثة فتحات بـ ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ طريقة . وبالتفكير بهذه الطريقة يمكن تحديد ان ١٦ فتحة يمكن ان توضع بـ $٤^{١٦}$ طريقة (حاصل ضرب ست عشرة اربعات) . وهذا العدد يزيد عن ٤ مليارات . وحتى لو اعتبرنا ان حساباتنا مبالغ فيها بعدة مرات (اذ انه ليس من المريح استخدام شبكات ذات فتحات متجاورة ، ويجب استثناء هذه الحالات) فانه تتبقى عدة مئات الملايين من الشبكات — محيط كامل ! فلتحاول ان تجد فيه الشبكة المطلوبة .

لو فرضنا ان مجموعة العاملين لفك الشفرة تضيع على تحضير الشبكة والمراجعة ، دقيقة واحدة ، فلحل شفرة الرسالة يمكن ان تلزم مئات الملايين من الدقائق — اى آلاف من السنين كاملة ولكن كل هذا صحيح فقط فى حالة ما اذا كانت عملية فك

الشفرة تتم كما يقال « بالايدى المجردة » . وفى كتاب « الجبر المسلى » لكاتب هذه السطور يمكن ان تقرأوا عن الحاسبات السريعة . ومثل هذه الماكينات تستطيع بواسطة برنامج معين ان تقوم بمئات الآلاف وحتى ملايين من العمليات الحسابية فى الثانية . وهى تستطيع ليس فقط ان تحسب ولكن تستطيع ان تختار كل الشبكات الممكنة واختبار فيما اذا تعطى اى من هذه الشبكات نصا مفهوما — ويلزم فقط ان نضع البرنامج المناسب لمثل هذه الماكينة . ولو ان تجربة شبكة واحدة على الماكينة يستلزم ، مثلا ، جزءا واحدا من الالف من الثانية ، فلمراجعة مئات الملايين من الشبكات تلزم مئات الآلاف من الثوانى اى عدة ايام . وكما ترى فانه فى ايامنا هذه تصبح عملية المحافظة على سرية الرسائل عملية صعبة .

٥٨ — كيف يمكن تذكر الشبكة ؟ ولكن لنفرض ان الخوف من ان اكتشاف السر بواسطة الماكينات غير موجود . لنقل ان محتوى الرسالة يجب ان يبقى سريا فقط لمدة ٢ — ٣ ايام ، ويمكن ان نعتبر هذا الزمن غير كاف لمصادرة الرسالة ، وارسالها الى مركز الحساب وحلها . وقرر العاملون سرا استخدام الشبكة . ومن المفهوم انه يجب على كلا المتراسلين ان يلتزما اليقظة لكى لا تقع شبكتهما فى ايد غريبة . من الاحسن الا تحفظ الشبكات بل ان تحضر عند استلام الرسالة ثم القضاء عليها بعد قراءة الرسالة. ولكن كيف يمكن حفظ مكان الفتحات ؟ هنا تأتى الينا الرياضيات للمساعدة



شكل ٤٩ . الشبكة الحسابية السرية

مرة اخرى . سنرمز للنوافذ بالرقم ١ وسنرمز للمربعات الاخرى بالرقم صفر . عندئذ يأخذ اول صف من مربعات الشبكة هذا الرمز (شكل ٤٩) :

٠١٠١٠٠١٠

او بحذف الصفر الاخير :

١٠١٠٠١٠

يرمز للصف الثانى بعد حذف الاصفار الاخيرة بالآتى :

١٠٠٠

الصفوف التالية ستأخذ الرموز الآتية :

١٠١٠٠١٠   ١٠٠٠١٠٠٠

١٠٠٠٠   ١٠٠٠١٠

١٠٠٠١٠٠   ١٠٠٠١

لتبسيط كتابة هذه الاعداد سنعتبر انها مكتوبة لا بالنظام العشرى الذى يستخدم عادة ولكن بالنظام « الثنائى » . هذا يعنى ان الواحد اكبر من الذى بجانبه الواقع الى اليمين لا بـ ١٠ مرات ولكن بمرتين فقط . والواحد فى نهاية العدد يعنى ، كالمعتاد ، واحد عادى ، والواحد فى المكان قبل الاخير يعنى اثنين ، فى المكان الثالث من النهاية – اربعة ، فى الرابع – ثمانية ، فى الخامس – ١٦ الخ . عند هذا الفهم يعنى العدد ١٠١٠٠١٠ الذى يبين وضع الفتحات فى الصف الاول يضم آحادا بسيطة :

٦٤ + ١٦ + ٢ = ٨٢

لان الاصفار تدل على عدم وجود آحاد من هذا الرتبة .

والعدد ١٠٠٠ (الصف الثانى) يحل محله فى النظام العشرى العدد ٨ .

يلزم تغيير الاعداد الاخرى بالاعداد التالية :

١٢٨ + ٣٢ + ٢ = ١٦٢

١٦

٦٤ + ٤ = ٦٨

١٢٨ + ٨ = ١٣٦

٣٢ + ٢ = ٣٤

١٦ + ١ = ١٧

ان حفظ الاعداد ٨٢ ، ٨ ، ١٦٢ ، ١٦ ، ٦٨ ، ١٣٦ ، ٣٤ ، ١٧ ليست عملية صعبة جدا . وبمعرفتها يمكن دائما الحصول على المجموعة الاولية للاعداد التى تحصل عليها منها والتى تبين مباشرة وضع الفتحات فى الشبكة .

اما كيفية القيام بذلك فسنبينه من مثال العدد الاول ٨٢ . سنقسمه على اثنين لكى نعرف كم عدد « الاثنين » فيه ، نحصل على ٤١ ولا يوجد باق ــ هذا يعنى انه فى المكان الاخير فى خانة الآحاد البسيطة يجب ان يوجد صفر ، وعدد « الاثنين » الذى حصلنا عليه وهو ٤١ نقسمه على ٢ لكى نعرف كم « اربعات » فى حالتنا هذه :

٤١ ÷ ٢ = ٢٠ والباقى ١

هذا يعنى ان فى خانة الاثنين ، اى فى المكان قبل النهائى يوجد الرقم ١ .

بعد ذلك نقسم ٢٠ على ٢ لكى نعرف كم عدد « الثمانيات » فى هذا العدد :

٢٠ ÷ ٢ = ١٠

لا يوجد باق وهذا يعني انه في مكان الاربعات يوجد صفر . نقسم ١٠ على ٢ نحصل على ٥ بدون باق اى انه فى مكان الثمانيات يوجد صفر .

وبقسمة ٥ على ٢ نحصل على ٢ ويكون الباقى ١ . ويكون فى هذه الخانة الرقم ١ . وفي النهاية نقسم ٢ على ٢ ونعرف انه فى الخانة التالية صفر اما فى الخانة النهائية ١ (هذه الخانة تقابل ٦٤) .

وهكذا تحددت جميع ارقام العدد المطلوب .

١٠١٠٠١٠

بما انه توجد هنا ٧ ارقام فقط وفى كل صف من الشبكة توجد ٨ مربعات فواضح ان صفر فى الامام قد فقد ويتحدد وضع الفتحات فى الصف الاول بالاعداد :

٠١٠١٠٠١٠

اى ان الفتحات فى الاماكن : الثانى والرابع والسابع .

وبنفس الطريقة تحدد الفتحات فى الصفوف الاخرى .

توجد ، كما ذكرنا سابقا، مجموعة نظم مختلفة للكتابة السرية . ولقد تطرقنا الى الشبكة لانها تمس الرياضيات عن قرب وتثبت مرة اخرى كم هى مختلفة نواحى الحياة التى يتناولها هذا العلم .

الباب السابع

حكايـــات عـــن الاعـــداد العملاقـــة

٥٩ ـ صفقة رابحة . متى واين حدثت هذه القصة ـ غير معروف . وربما لم تحدث بتاتا ، والارجح ان يكون الامر كذلك . ولكن مهما يكن فهذه الرواية طريفة جدا ، وجديرة بالسماع .

١)

عاد المليونير الغنى من غيبته مسرورا اكثر من المعتاد : لقد حدثت له فى الطريق مقابلة سعيدة ، اتت له بارباح كبيرة .

وروى لاهل بيته قائلا : «ياله من حظ سعيد . ويبدو انه ليس عبثا ان يقول الناس ان النقود تدر نقودا . وها هى النقود تجرى الى نقودى . وبدون سابق انذار ! لقد قابلت فى الطريق رجلا لا اعرفه ، لا يبدو عليه انه ذو منزلة . ولم اكن لابدأ معه الحديث لو لا ان بدأه هو عندما احس اننى فى سعة من امرى . واقترح على فى نهاية الحديث صفقة رابحة ، لدرجة انها حبست على انفاسى .

قال محدثى : لنتفق على ما يلى ـ سأحضر لك مبلغ مائة الف روبل يوميا طيلة شهر كامل . ليس بدون مقابل ، طبعا ، ولكن الثمن تافه .

فى اول يوم ستدفع ، تبعا للاتفاق ، ومن المضحك قول ذلك ، كوبيكا واحدا فقط .

لم اصدق سمعى ، فاعدت سؤاله :

— كوبيكا واحدا ؟

قال :

— كوبيكا واحدا ، وعن المائة الف الثانية ستدفع كوبيكين .

ولم اتمالك نفسى ، فقلت :

— حسنا ، وبعد ؟

— وبعد ، تتقاضى عن المائة الف الثالثة ٤ كوبيكات ، وعن الرابعة ٨ كوبيكات ، وعن الخامسة ١٦ كوبيكا . وهكذا لمدة شهر ، كل يوم ضعف اليوم الذى يسبقة .

فسألت :

— وبعد ذلك ؟

قال :

— لا شيء ، لن اطالبك بشيء آخر شرط ان تلتزم جيدا بالاتفاق . فسآتى صباح كل يوم بالمائة الف روبل ، وانت تدفع ما اتفقنا عليه . ولا تحاول ان تنهى العملية قبل انتهاء الشهر .

هل يصدق انه يعطينى مئات الآلاف من الروبلات مقابل كوبيكات . واذا لم تكن النقود مزورة فان هذا الرجل ليس بكامل عقله . ولكن العملية مربحة ولا يجب تركها .

قلت له :

ــ حسنا ، احضر النقود . اما نقودى فسادفعها بكل دقة . وانت لا تخادع احضر نقودا سليمة .

فقال :

ــ فلتكن مطمئنا ، انتظرنى غدا صباحا .

لكننى اخشى امرا واحدا : هل سيحضر ؟ فقد يدرك انه قد ارتبط بعمل غير مربح بالمرة ، ولكن يوم غد لقريب .

٢)

مضى يوم . وفى الصباح الباكر طرق شباك الرجل الغنى نفس الشخص المجهول الذى قابله فى الطريق .

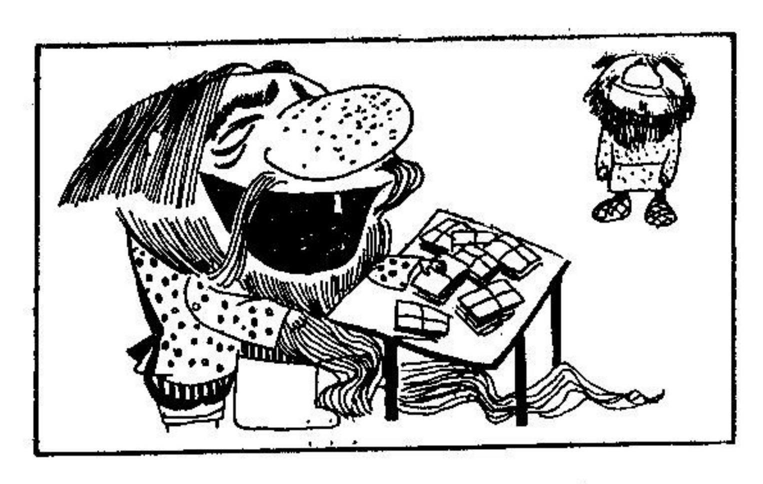
وقال :

ــ هيأ النقود ، لقد احضرت نقودى .

وفعلا ، أخذ الرجل الغريب عندما دخل الغرفة ، يخرج النقود ، كانت نقودا حقيقية ، غير مزورة . عد مائة الف روبل بالضبط ، وقال :

ــ ها هى نقودى تبعا للاتفاق . ها قد جاء دورك فى الدفع .

وضع الغنى على المنضدة كوبيكا نحاسيا ، وانتظر بتحفز هل سيأخذ الضيف القطعة النحاسية ام انه سيعيد التفكير ويطالب باعادة نقوده . نظر الضيف الى الكوبيك ووزنه فى يده واخفاه فى حقيبته .



شكل ٥٠ . « مائة الف سقطت من السماء ! »

قال :

— انتظرنى غدا فى نفس هذا الوقت . ولكن لا تنس احضار الكوبيكين ، ثم خرج .

لم يصدق الغنى ان حالفه التوفيق : مائة الف سقطت من السماء ! عد النقود مرة اخرى ، وتأكد جيدا انها غير مزورة ، وكل شيء على ما يرام ، واخفى النقود بعيدا عن الاعين واخذ ينتظر وجبة الغد . وفى الليل راودته الشكوك : الا يجوز ان يكون قاطع طريق قد تظاهر بالبساطة لكى يعرف اين اخفى النقود ثم يهجم بعصابة من اللصوص ؟

اغلق الغنى الابواب جيدا ، وبحلول المساء صار يتطلع من النافذة ويدقق السمع ولم يستطع ان يغفو لفترة طويلة . وفى الصباح طرق الرجل المجهول النافذة مرة اخرى واحضر النقود . عد مائة الف واخذ كوبيكيه الاثنين واخفاهما فى حقيبته وخرج . وقال عند الوداع :

ـ هيأ اربعة كوبيكات ليوم غد .

ومرة اخرى فرح الغنى فقد حصل على المائة الف الثانية بلا مقابل . الضيف لا يشبه اللص ، لا يتلصص حواليه ، ولا يطيل النظر ، ولكنه يطلب كوبيكاته فقط . ياله من رجل غريب الاطوار اذا زاد عدد امثاله على الارض لعاش الناس الاذكياء فى سعة ...

وحضر الرجل المجهول فى اليوم الثالث ، وانتقلت المائة الف الثالثة الى الرجل الغنى مقابل ٤ كوبيكات .

ومر يوم آخر ، واحضر الرجل وبنفس الطريقة المائة الف الرابعة مقابل ٨ كوبيكات .

وجاء بالمائة الف الخامسة مقابل ١٦ كوبيكا . ثم السادسة مقابل ٣٢ كوبيكا .

بعد مضى سبعة ايام من بداية الصفقة ، استلم الغنى سبعمائة الف روبل ، ودفع مبلغا تافها ، هو محسوبا بالكوبيكات :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ = روبل واحد و ٢٧ كوبيكا

لقد اعجب ذلك المليونير البخيل ، واخذ يندم على انه اتفق على ان يفعل ذلك لمدة شهر واحد . فلن يستطيع ان يأخذ اكثر

من ثلاثة ملايين . هل يمكن ان أجعل هذا الغريب يطيل المدة ولو لفترة نصف شهر آخر ؟ اخشى ان يفهم انه يعطى النقود بلا مقابل ...

وكان الرجل المجهول يحضر كل صباح بانتظام حاملا المائة الف روبل . وفى اليوم الثامن اخذ روبلا و٢٨ كوبيكا وفى اليوم التاسع روبلين و ٥٦ كوبيكا وفى اليوم العاشر ٥ روبلات و ١٢ كوبيكا ، وفى اليوم الحادى عشر ١٠ روبلات و ٢٤ كوبيكا وفى اليوم الثانى عشر ٢٠ روبلا و ٤٨ كوبيكا وفى اليوم الثالث عشر ٤٠ روبلا و ٩٦ كوبيكا وفى اليوم الرابع عشر ٨١ روبلا و ٩٢ كوبيكا .

كان الغنى يدفع هذه النقود بكل سرور اذ انه قد حصل على مليون و ٤٠٠ الف روبل واعطى الرجل المجهول ما يقرب من مائة وخمسين روبلا فقط .

ولكن لم تستمر فرحة الغنى لمدة طويلة ، فسرعان ما اصبح يفكر ، ان الضيف الغريب لم يكن بالمغفل وان الصفقة معه ليست مربحة بقدر ما تراءى له فى البداية . وبعد مضى ١٥ يوما وجب عليه ان يدفع ثمنا للمائة الف الجديدة ليس كوبيكات معدودات ولكن مئات الروبلات وزاد الدفع بشكل مخيف . وفعلا فقد دفع الغنى فى النصف الثانى من الشهر :

عن المائة الف الـ ١٥ ١٦٣ روبلا و ٨٤ كوبيكا
عن المائة الف الـ ١٦ ٣٢٧ روبلا و ٦٨ كوبيكا
عن المائة الف الـ ١٧ ٦٥٥ روبلا و ٣٦ كوبيكا
عن المائة الف الـ ١٨ ١٣١٠ روبلات و ٧٢ كوبيكا
عن المائة الف الـ ١٩ ٢٦٢١ روبلا و ٤٤ كوبيكا

غير ان الغنى اعتبر انه لا يزال بعيدا عن الخسارة ، على الرغم من انه دفع ما يقرب من خمسة آلاف الا انه استلم ١٨٠٠٠٠٠ روبل .

ولكن المكسب صار يتضاءل يوما بعد يوم بسرعة اكثر فاكثر .

ها هي المدفوعات التالية :

عن المائة الف الـ ٢٠ ٥٢٤٢ روبلا و ٨٨ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢١ ١٠٤٨٥ روبلا و ٧٦ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢٢ ٢٠٩٧١ روبلا و ٥٢ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢٣ ٤١٩٤٣ روبلا و ٤ كوبيكات
عن المائة الف الـ ٢٤ ٨٣٨٨٦ روبلا و ٨ كوبيكات
عن المائة الف الـ ٢٥ ١٦٧٧٧٢ روبلا و ١٦ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢٦ ٣٣٥٥٤٤ روبلا و ٣٢ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢٧ ٦٧١٠٨٨ روبلا و ٦٤ كوبيكا

ووجب عليه ان يدفع اكثر مما استلم . وكان من الافضل لو توقف ولكن لا يمكن الاخلال بالتعاقد .

بعد ذلك زادت الاحوال سوءا . وتأكد المليونير ولكن بعد فوات الاوان ان هذا الرجل المجهول قد خدعه بقسوة ، وانه سيأخذ منه نقودا اكثر بكثير مما سيدفع ..

مع بداية اليوم الثامن والعشرين وجب على الغنى ان يدفع بالملايين . اما اليومان الاخيران فقد افلساه تماما . ونورد ادناه المدفوعات الضخمة :

عن المائة الف الـ ٢٨ ١٣٤٢١٧٧ روبلا و ٢٨ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٢٩ ٢٦٨٤٣٥٤ روبلا و ٥٦ كوبيكا
عن المائة الف الـ ٣٠ ٥٣٦٨٧٠٩ روبلا و ١٢ كوبيكا

عندما غادره الضيف آخر مرة اخذ المليونير يحسب كم كلفته تلك الثلاثة ملايين روبل التى بدت رخيصة لاول وهلة . فاتضح انه دفع لهذا المجهول :

١٠ ٧٣٧ ٤١٨ روبلا و ٢٣ كوبيكا

اى ١١ مليونا تقريبا . وقد بدأت الحكاية من كوبيك واحد . كان الشخص المجهول يستطيع ان يقدم مبلغ ثلاثمائة الف دون ان يخسر .

(٣

قبل ان ننهى هذه الرواية سابين باى طريقة يمكن التعجيل بعملية حساب خسارة المليونير . بتعبير آخر كيف يمكن باسرع وقت اجراء عملية الجمع لمتسلسلة من الاعداد :

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + .. الخ

من السهل ملاحظة الخاصية التالية لهذه الاعداد .

١ = ١

٢ = ١ + ١

٤ = (١ + ٢) + ١

٨ = (١ + ٢ + ٤) + ١

١٦ = (١ + ٢ + ٤ + ٨) + ١

٣٢ = (١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦) + ١ .. الخ

نحن نرى ان كل عدد من هذه المتسلسلة يساوى كل الاعداد التى تسبقه مأخوذة معا مع اضافة واحد صحيح . ولذلك فعندما يلزم جمع كل اعداد مثل هذه المتسلسلة مثلا من ١ حتى ٣٢٧٦٨ فاننا نجمع فقط الى العدد الاخير (٣٢٧٦٨) مجموع كل الاعداد السابقة ، وبتعبير آخر نضيف نفس العدد الاخير مع طرح واحد صحيح منه (٣٢ ٧٦٨ – ١) فنحصل على ٦٥ ٥٣٥ .

8—620

بهذه الطريقة يمكن ان نحسب خسارة المليونير البخيل بسرعة كبيرة عندما نعرف المبلغ الذى دفعه فى آخر مرة . علما بان آخر دفعة كانت ٥٣٦٨٧٠٩ روبلات و ١٢ كوبيكا .

ولذلك فبجمع ٥٣٦٨٧٠٩ روبلات و ١٢ كوبيكا مع ٥٣٦٨٧٠٩ روبلات و ١١ كوبيكا نحصل فى الحال على النتيجة المطلوبة :

١٠ ٧٣٧ ٤١٨ روبلا و ٢٣ كوبيكا

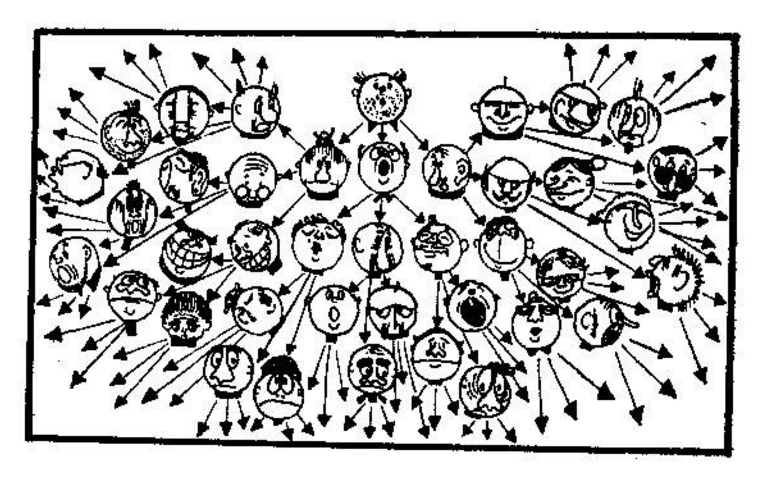
٦٠ — الاشاعات فى المدينة . ما اعجب السرعة التى تنتشر بها الاشاعات فى المدينة . ويحدث احيانا انه لا تمر ساعتان على وقت حدوث حدث ما رآه عدد بسيط من الناس فقط ، بينما يكون الخبر قد اجتاح كل المدينة ، والكل يعرفون عنه . والكل قد سمعوا به . وتبدو هذه السرعة غير العادية كانها امر مدهش ، ويبعث على الحيرة تماما .

ولكن اذا نظرنا للعملية من وجهة النظر الحسابية لاصبح من الواضح انه لا يوجد هنا اى شىء مدهش: كل شىء يفسر بخصائص الاعداد ، وليس بالخصائص الغامضة للاشاعات ذاتها .

ولنبحث الحادث التالى على سبيل المثال . .

١)

وصل فى الساعة ٨ صباحا الى مدينة صغيرة تقطنها ٥٠ الف نسمة احد ابناء العاصمة ، وجاء بخبر جديد يهم الكل .



شكل ٥١ . طريق انتشار الاشاعة

فروى الخبر فى البيت الذى توقف القادم فيه لثلاثة افراد من السكان المحليين فقط . واخذ هذا من الوقت ربع ساعة مثلا .

وهكذا علم بالخبر فى الساعة ٨$\frac{1}{4}$ صباحا اربعة فقط هم : القادم وثلاثة من سكان المدينة .

وبعد ان علم الثلاثة بالخبر اسرع كل منهم الى ابلاغه لثلاثة آخرين . وقد تطلب ذلك ربع ساعة ايضا . اى انه بعد نصف ساعة من وصول الخبر الى المدينة عرفه ٤ + (٣ × ٣) = ١٣ شخصا .

وقام كل من الـ ٩ اشخاص من الذين عرفوا الخبر بابلاغه فى

الربع ساعة التالية الى ٣ اشخاص آخرين ، بحيث انه اصبح معروفا بحلول الساعة ٨$\frac{٣}{٤}$ صباحا لـ

١٣ + (٣ × ٩) = ٤٠ شخصا

فاذا ما انتشرت الاشاعة بالمدينة بعد ذلك بنفس هذه الطريقة ، اى ان كل من عرف الخبر استطاع فى الربع ساعة التالية ان يرويه الى ثلاثة من مواطنيه ، فان اطلاع المدينة على الخبر سيتم بالجدول التالى :

فى الساعة ٩ سيعرف الخبر ٤٠ + (٣ × ٢٧) = ١٢١ شخصا
فى الساعة ٩$\frac{١}{٤}$ سيعرف الخبر ١٢١ + (٣ × ٨١) = ٣٦٤ شخصا
فى الساعة ٩$\frac{١}{٢}$ سيعرف الخبر ٣٦٤ + (٣ × ٢٤٣) = ١٠٩٣ شخصا

بعد مضى ساعة ونصف بعد ظهور الخبر فى المدينة لاول مرة سيعرفه ، كما نرى ، ١١٠٠ شخص فقط . وقد يبدو ذلك كما لو كان قليلا بالنسبة للسكان البالغ عددهم ٥٠ ٠٠٠ شخص . ويجوز الاعتقاد ان الخبر لن يعرف بسرعة من قبل سكان المدينة جميعا . فلنتتبع على اى حال انتشار الخبر فى الساعات التالية :
فى الساعة ٩$\frac{٣}{٤}$ سيعرف الخبر ١٠٩٣ + (٣ × ٧٢٩) = ٣٢٨٠ شخصا
فى الساعة ١٠ سيعرف الخبر ٣٢٨٠ + (٣ × ٢١٨٧) = ٩٨٤١ شخصا
وبعد مرور ربع ساعة سيعرف الخبر اكثر من نصف سكان المدينة :

$$٩٨٤١ + (٣ \times ٦٥٦١) = ٢٩٥٢٤$$

وهذا يعنى انه قبل الساعة العاشرة والنصف صباحا سيعرف كل سكان المدينة الخبر الذى كان يعرفه فى الساعة ٨ صباحا شخص واحد فقط .

(٢)

لنتتبع الآن كيف تم الحساب السابق .

لقد ادى فى جوهر الامر الى اننا جمعنا متسلسلة اعداد كالآتية :

$$١ + ٣ + (٣ \times ٣) + (٣ \times ٣ \times ٣) + (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) + ..$$ الخ

ولكن ، الا يمكن ان نعرف هذا المجموع بطريقة اقصر كما فعلنا سابقا مع مجموع اعداد المتسلسلة ١ + ٢ + ٤ + ٨ . . . الخ ؟ هذا ممكن اذا اخذنا فى الاعتبار الخاصية الآتية للاعداد التى نريد جمعها :

$$١ = ١$$

$$٣ = ١ \times ٢ + ١$$

$$٩ = (١ + ٣) \times ٢ + ١$$

$$٢٧ = (١ + ٣ + ٩) \times ٢ + ١$$

$$٨١ = (١ + ٣ + ٩ + ٢٧) \times ٢ + ١$$ ... الخ

بتعبير آخر : ان كل عدد من هذه المتسلسلة يساوى ضعف مجموع كل الاعداد السابقة زائد واحد صحيح .

من هنا ينبع انه اذا وجب ايجاد مجموع كل اعداد المتسلسلة من الواحد حتى اى عدد فانه يكفى ان نضيف الى العدد النهائى نصفه (ويجب ان نحذف مسبقا من العدد الاخير الواحد الصحيح) .

فمثلا مجموع الاعداد :

١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ٢٤٣ + ٧٢٩

يساوى ٧٢٩ + نصف ٧٢٨ ، اى ٧٢٩ + ٣٦٤ = ١٠٩٣

٣)

فى المثال السابق قام كل شخص فى المدينة عرف الخبر بنقله الى ثلاثة اشخاص فقط . ولكن اذا كان سكان المدينة ميالين الى المحادثة اكثر واخبر كل مواطن الخبر لا لثلاثة اشخاص ولكن ، مثلا ، لـ ٥ او حتى لـ ١٠ اشخاص آخرين لانتشر الخبر باسرع من ذلك بكثير .

مثلا عند نقل الخبر الى خمسة اشخاص تكون صورة اطلاع المدينة عليه كالآتى :

فى الساعة ٨		= شخص واحد
فى الساعة ٨ ¼	١ + ٥	= ٦ اشخاص
فى الساعة ٨ ½	٦ + (٥ × ٥)	= ٣١ شخصا
فى الساعة ٨ ¾	٣١ + (٢٥ × ٥)	= ١٥٦ شخصا

فى الساعة	٩	١٥٦ + (١٢٥ × ٥)	= ٧٨١ شخصا
فى الساعة	٩ ١/٤	٧٨١ + (٦٢٥ × ٥)	= ٣٩٠٦ اشخاص
فى الساعة	٩ ١/٢	٣٩٠٦ + (٣١٢٥×٥)	= ١٩٥٣١ شخصا

وبذلك سيكون الخبر معروفا لكل الـ ٥٠ الف شخص من سكان المدينة قبل الساعة ٩ ٣/٤ صباحا .

وتنتشر الاشاعة اسرع اذا ما نقل الخبر كل فرد سمعه الى ١٠ اشخاص آخرين . عندئذ نحصل على متسلسلة طريفة وسريعة التصاعد للاعداد :

فى الساعة	٨		= ١
فى الساعة	٨ ١/٤	١ + ١٠	= ١١
فى الساعة	٨ ١/٢	١١ + ١٠٠	= ١١١
فى الساعة	٨ ٣/٤	١١١ + ١٠٠٠	= ١١١١
فى الساعة	٩	١١١١ + ١٠٠٠٠	= ١١١١١

ان العدد التالى فى هذه المتوالية واضح وهو ١١١١١١ . وهذا يدل على ان كل المدينة ستعرف الخبر فى بداية الساعة العاشرة صباحا . اى ان الاشاعة ستنتشر تقريبا بخلال ساعة .

٦١ — <u>سيل من الدراجات الرخيصة</u> . فى سنى ما قبل الثورة كان فى الاتحاد السوفييتى ، ومن المحتمل انه يوجد فى البلدان

الاخرى حتى الآن ، تجار يستعملون طريقة خاصة لبيع مبيعاتهم ، والتى تكون عادة من نوع سيء . وكانوا يعمدون اول الامر الى نشر اعلانات فى الجرائد والمجلات الواسعة الانتشار ذات المحتوى التالى

دراجة مقابل ١٠ روبلات !
كل فرد يمكنه ان يحصل على دراجة
مقابل ١٠ روبلات فقط .
انتهزوا الفرصة النادرة .
١٠ روبلات بدلا من ٥٠ روبلا .
ترسل شروط الشراء بدون مقابل

وكان كثير من الناس ينجذبون للاعلان المغرى ، بالطبع ، ويطلبون ارسال شروط الشراء العجيب . وردا على الطلب كان يصلهم برنامج مفصل يعرفون منه الآتى .

تستلم مقابل الـ ١٠ روبلات لا الدراجة نفسها ولكن ٤ تذاكر يلزم بيعها بسعر ١٠ روبلات للتذكرة الى اربعة من المعارف . وبذلك فان الاربعين روبلا التى يحصل عليها بهذه الطريقة يجب ان ترسل للشركة ، وعندئذ فقط تصل الدراجة . وهذا يعنى ان المشترى يدفع فى الواقع ١٠ روبلات اما الاربعين روبلا الباقية فلا يدفعها من جيبه الخاص . حقا انه بالاضافة لدفع الـ ١٠ روبلات نقدا ،

كان يجب على المشترى ان يشغل نفسه ببيع التذاكر للمعارف ، ولكن هذا العمل الصغير لم يدخل فى الحساب .

اذن ماذا كانت هذه التذاكر ؟ وما هى الميزات التى حصل عليها مشترى التذاكر مقابل الـ ١٠ روبلات ؟ لقد حصل على حق ان يغير التذكرة الواحدة بخمس منها لدى الشركة ، وبكلمات اخرى لقد حصل على امكانية جمع ٥٠ روبلا لشراء الدراجة التى ساوت بالنسبة له فقط ١٠ روبلات ، اى ثمن التذكرة . اما اصحاب التذاكر الجدد فقد حصلوا من الشركة ايضا على ٥ تذاكر لتوزيعها . . الخ .

من النظرة الاولى لم يبدو ان فى الامر اية خدعة . فقد نفذ ما وعد به الاعلان : اذ دفع المشترون عشرة روبلات فعلا ثمنا للدراجة . ولم تخسر الشركة ، فقد استلمت الثمن الكامل لسلعتها .

ولكن اللعبة كلها عبارة عن احتيال لا ريب فيه . ان « السيل » وهو اسم هذه الخدعة عندنا او « الكرة الثلجية » كما سماها الفرنسيون ، كان يسلب نقود المشاركين الكثيرين فى اللعبة الذين لم يستطيعوا بيع تذاكرهم التى اشتروها . لقد كانوا يدفعون للشركة الفرق ما بين الـ ٥٠ روبلا ثمنا للدراجة والـ ١٠ روبلات الثمن المدفوع للدراجة . وعاجلا او آجلا كان لابد وان تحل اللحظة التى يعجز فيها اصحاب التذاكر عن ايجاد الراغبين فى اقتنائها . كان هذا لابد وان يحدث ، وستفهم ذلك ، لو انك اجهدت نفسك

فى ان تتبع بواسطة القلم كيف يزداد بسرعة عدد الناس المنجرفين الى السيل .

ان اول مجموعة من المشتركين التى حصلت على تذاكرها من الشركة تجد المشترين عادة بدون جهد كبير ، فكل واحد من هؤلاء يعطى تذاكر لاربعة مشتركين جدد .

اما هؤلاء الاربعة فلابد وان يبيعوا تذاكرهم لـ ٤ × ٥ اى لـ ٢٠ شخصا آخر ، باقناعهم بفائدة شراء هذه التذاكر . فلنفرض انه تسنى لهم ذلك ، وكسبوا ٢٠ مشتريا .

يواصل السيل تقدمه : ويجب على الـ ٢٠ مشتريا الجدد الحاصلين على التذاكر ان يوزعوا تذاكرهم على ٢٠ × ٥ = ١٠٠ شخص آخرين .

وحتى الآن فان كل واحد ممن ابتدأ السيل قد جر الى اللعبة

١ + ٤ + ٢٠ + ١٠٠ = ١٢٥ شخصا

حصل ٢٥ شخصا منهم على دراجات ، اما الـ ١٠٠ فيحدوهم الامل فى الحصول عليها شرط ان يدفعوا مقابل هذا الامل ١٠ روبلات .

والآن يخرج السيل من المحيط الضيق للمعارف ويبدأ جريانه فى كل المدينة حيث تزداد الصعوبة فى ايجاد مادة جديدة . ويجب على المائة شخص الاخيرين الحائزين على التذاكر ان يبيعوها لـ ٥٠٠ شخص من المواطنين ، وينبغى على هؤلاء ان يجدوا

٢٥٠٠ ضحية جديدة . وتمتلىء المدينة بسرعة بفيضان التذاكر ، وتصبح عملية ايجاد راغبين بشراء التذاكر عملية صعبة جدا .

يرى القارئ ان عدد الناس الذين انجروا الى السيل يتنامى بنفس القانون الذى تحدثنا عنه عندما تكلمنا عن انتشار الاشاعات . وها هو الهرم العددى الذى يتكون فى هذه الحالة :

١
٤
٢٠
١٠٠
٥٠٠
٢٥٠٠
١٢٥٠٠
٦٢٥٠٠

اذا كانت المدينة كبيرة وبلغ عدد كافة السكان القادرين على قيادة الدراجة ٦٢٥٠٠ شخص فانه فى اللحظة قيد البحث اى فى الدورة الثامنة لابد وان ينتهى السيل . وبذلك يكون الجميع قد انجرفوا الى السيل . بينما لم يحصل على دراجات سوى خمس عدد السكان اما الـ $\frac{٤}{٥}$ الآخرون فيمتلكون تذاكر .

اما بالنسبة لمدينة اكبر من حيث عدد السكان ، حتى بالنسبة

للعاصمة تضم ملايين السكان ، فان لحظة التشبع تحدث بعد مضى عدة دورات فقط ، لان الاعداد فى السيل تزداد بسرعة غير معقولة . ونورد ادناه طوابق الهرم العددى الذى بيناه :

٣١٢٥٠٠٠
١٥٦٢٥٠٠٠
٧٨١٢٥٠٠٠
٣٩٠٦٢٥٠٠٠

ففى الدورة الثانية عشرة يمكن ان يجرف السيل سكان دولة كاملة . وسيخدع القائمون به $\frac{٤}{٥}$ السكان .

ولكن ما الذى تحصل عليه الشركة من اجراء هذا السيل . انها تجبر $\frac{٤}{٥}$ السكان على ان يدفعوا ثمن السلعة التى يحصل عليها $\frac{١}{٥}$ السكان الباقين . وبتعبير آخر انها تجبر كل اربعة مواطنين على ان يساعدوا الخامس . بالاضافة الى ذلك تحصل الشركة بدون مقابل تماما على عدد كبير من موزعى سلعتها الدؤوبين . لقد وصف احد الكتاب هذه العملية بحق بانها « سيل من النصب المتبادل » . ان العملاق العددى الذى يختفى وراء هذه العملية يعاقب هؤلاء الذين لا يستطيعون استخدام الحساب لحماية مصالحهم الشخصية من تطاول المحتالين .

٦٢ ـ مكافأة . اليكم ما حدث منذ عدة قرون مضت فى روما القديمة * .

١)

قام القائد تيرينسى ، تنفيذا لامر الامبراطور ، بحملة مظفرة وعاد الى روما محملا بالغنائم . وعندما وصل الى روما طلب مقابلة الامبراطور . فقابله الامبراطور ببشاشة ، وشكره بحرارة على خدماته العسكرية للامبراطورية ووعده بمكافأة هى ان يمنحه منزلة رفيعة فى مجلس الشيوخ .

ولكن تيرينسى لم يكن يريد ذلك . فعارضه قائلا :

ـ لقد حققت كثيرا من الانتصارات ، لكى ازيد من جبروتك ، يا مولاى ، ولكى احيط اسمك بهالة المجد . ولم اهاب الموت ، ولو كانت لدى لا حياة واحدة ولكن عدة حيوات لضحيت بها من اجلك . ولكنى قد تعبت من القتال ، وولى الشباب واصبح الدم يسيل فى عروقى بصورة ابطأ . لقد حان الحين لكى استريح فى بيت اجدادى ولكى استمتع بمسرات الحياة المنزلية .

فسأل الامبراطور :

ـ وماذا تطلب منى يا تيرينسى ؟

---

* القصة مأخوذة من مخطوطة لاتينية قديمة موجودة فى احد خزائن الكتب الخاصة فى انجلترا .

— اسمعني متسامحا ، يا مولاى ! فخلال سنوات حياتى الطويلة فى الحرب ، كنت الطخ سيفى بالدم من يوم لآخر ، ولم تسنح لى الفرصة لكى أدبر لنفسى بعض المال . اننى فقير يامولاى ..

— اكمل يا تيرينسى الشجاع .

واستطرد القائد يقول متشجعا :

— لو انك تريد ان تكافىء خادمك المتواضع ، فليساعدنى كرمك على ان اعيش بقية حياتى فى سلام وفى بسطة من العيش فى ثنايا العش المنزلى . اننى لا ابحث عن مراسيم التكريم ولا المكانة الرفيعة فى مجلس الشيوخ الجبار . اننى اتمنى الابتعاد عن السلطة وعن الحياة العامة لكى استريح فى هدوء . مولاى ، اعطنى مالا لكى اضمن بقية حياتى .

وتقول الاسطورة ان الامبراطور لم يكن معروفا بكرمه الواسع وكان يحب ان يدخر الاموال لنفسه ، وما كان ينفقها على الآخرين بسخاء . ولقد اضطره طلب القائد على ان يفكر .

فسال القائد :

— اى مبلغ يا تيرينسى تعتبره انت كافيا لك ؟

— مليون دينار ، يا مولاى .

ومرة اخرى استغرق الامبراطور فى التفكير . بينما اطرق القائد رأسه انتظارا . واخيرا تكلم الامبراطور فقال :

— ايها المغوار تيرينسى ! انت محارب عظيم ، وانتصاراتك

العظيمة اهلتك لمكافأة سخية . سامنحك الثروة . غدا فى منتصف النهار ستسمع هنا قرارى .

فسجد تيرينسى وخرج .

(٢)

فى اليوم التالى ، وفى الموعد المحدد جاء القائد الى قصر الامبراطور .

فقال الامبراطور :

— سلام عليك يا تيرينسى الشجاع !

واخفض تيرينسى رأسه بخشوع :

— لقد اتيت يا مولاى لكى اسمع قرارك . لقد وعدت عطفا منك ان تكافئنى .

اجاب الامبراطور :

— لا اريد ان ياخذ محارب عظيم مثلك مكافأة زهيدة مقابل اعماله العظيمة . فلتسمعنى حتى النهاية . توجد فى خزينتى ٥ ملايين براسا* نحاسيا . والآن اسمع ما اقوله بانتباه . ستدخل الى الخزينة وتأخذ قطعة واحدة فى يدك وتعود الى هنا وتضعها عند قدمى . وفى اليوم التالى ستذهب مرة اخرى الى الخزينة وتاخذ قطعة نقود تساوى براسين اثنين وتضعها هنا بجانب الاولى . ففى اليوم الثالث

---

* قطعة نقود صغيرة تساوى $\frac{١}{٥}$ الدينار .

ستحضر قطعة نقود تساوى ٤ براسات وفى الرابع ـ قطعة تساوى ٨ براسات فى الخامس ـ ١٦ براسا وهكذا فى كل مرة تضاعف ثمن قطعة النقود . وسآمر كل يوم بان تصنع لك قطع من النقود بالثمن المناسب . وستخرج من خزينتى القطع النقدية ما دامت لديك من القوة فى ان ترفعها . ولا يملك احد الحق فى ان يساعدك . اذ يجب ان تستعمل قوتك الذاتية فقط . وعندما ستلحظ انك لا تستطيع ان ترفع القطعة النقدية اكثر توقف ، فاتفاقنا سينتهى ، ولكن كل القطع التى تمكنت من اخراجها ستكون لك ، وستكون هى مكافأتك .

استمع تيرينسى الى كل كلمة قالها الامبراطور .

وتراءى له العدد الهائل من القطع النقدية ، وكل واحدة اكبر من الاخرى ، والتى سيخرجها من خزينة الدولة .

فاجاب بابتسامة ابتهاج :

ـ انا راض بعطفك يا مولاى ، ان مكافأتك سخية حقا !

(٣)

ابتدأت زيارات تيرينسى اليومية لخزينة الدولة . وكانت الخزينة قريبة من قاعة الاستقبال للامبراطور ، ولم يبذل القائد جهدا يذكر فى اول انتقالاته مع القطع النقدية . فاخرج من الخزينة فى اليوم الاول براسا واحدا فقط . وهى قطعة نقدية ليست بالكبيرة يبلغ قطرها ٢١ مم ووزنها ٥ جم .

وكان سهلا ايضا الانتقال الثانى والثالث والرابع والخامس والسادس عندما اخرج القائد قطعا نقدية ثنائية الوزن ورباعية الوزن ، و ٨ اضعاف الوزن و ١٦ ضعف الوزن و ٣٢ ضعف الوزن .

وكانت القطعة النقدية السابعة تزن بقيم موازيننا الحديثة ٣٢٠ جم ويبلغ قطرها ٨½ سم (وبحساب ادق ٨٤ مم)* .

فى اليوم الثامن اضطر تيرينسى ان يحمل من الخزينة قطعة نقدية تقابل ١٢٨ وحدة من وحدات القطع النقدية . وكان وزنها يساوى ٦٤٠ جم وقطرها ١٠½ سم تقريبا .

وفى اليوم التاسع احضر تيرينسى الى القاعة الامبراطورية قطعة نقدية تقابل ٢٥٦ وحدة من وحدات القطع النقدية . وكان قطرها يساوى ١٣ سم وتزن اكثر من ١¼ كجم .

وفى اليوم الثانى عشر بلغ قطر القطعة النقدية ٢٧ سم ووزنها ١٠¼ كجم .

وكان الامبراطور حتى الآن ينظر باعجاب الى القائد ، ولم يخف الآن ابتهاجه . لقد رأى ان القائد قام بـ ١٢ انتقاله واخرج من الخزينة ٢٠٠٠ ونيف من القطع النقدية فقط .

---

* لو ان القطعة النقدية كانت اكبر من العادية بـ ٦٤ مرة لكانت اوسع واسمك منها بـ ٤ مرات فقط و لذلك فان ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ . يجب اخذ هذا فى الاعتبار فى المستقبل عند حساب مقاييس القطع النقدية التى يجرى الحديث عنها فى القصة .

فى اليوم الثالث عشر حمل تيرينسى الشجاع قطعة نقدية تعادل ٤٠٩٦ وحدة وبلغ قطرها ٣٤ سم تقريبا ووزنها ½٢٠ كجم .

وفى اليوم الرابع عشر اخرج تيرينسى من الخزينة قطعة نقدية وزنها ٤١ كجم وقطرها حوالى ٤٢ سم .

سأله الامبراطور وهو يغالب الابتسام :

— الم تتعب يا شجاعى تيرينسى ؟

اجاب القائد وهو يمسح العرق عن جبهته :

— لا يامولاى .

وجاء اليوم الخامس عشر . وكان حمل تيرينسى فى هذا اليوم ثقيلا . وتقدم ببطء الى الامبراطور حاملا القطعة النقدية التى تعادل ١٦٣٨٤ وحدة نقدية . وبلغ قطرها ٥٣ سم ووزنها ٨٠ كجم ، وهو وزن محارب ضخم .

وفى اليوم السادس عشر صار القائد يتارجح تحت وطاة الحمل الذى كان على ظهره . وكان ذلك الحمل قطعة نقدية تعادل ٣٢٧٦٨ وحدة نقدية ووزنها ١٦٤ كجم ووصل قطرها الى ٦٧ سم .

كان القائد خائر القوى ويتنفس بصعوبة . وابتسم الامبراطور ..

عندما ظهر تيرينسى فى قاعة الاستقبال للامبراطور فى اليوم التالى قوبل بضحك عال . لم يعد تيرينسى يستطيع ان يحمل حمله بيديه بل كان يدحرجه امامه . وكان قطر القطعة النقدية ٨٤ سم



شكل ٥٢ . القطعة النقدية السابعة عشرة

ووزنها ٣٢٨ كجم . وكان وزنها يعادل وزن ٦٥٥٣٦ من وحدات القطع النقدية .

كان اليوم الثامن عشر آخر يوم لثراء تيرينسى . وفى هذا اليوم انتهت زياراته للخزينة ومسيرته مع الحمولات الى قاعة الاستقبال للامبراطور . فقد وجب عليه فى هذه المرة ان يجلب قطعة نقدية تعادل ١٣١٠٧٢ من الوحدات النقدية يزيد قطرها على المتر ووزنها ٦٥٥ كجم . واستخدم القائد رمحه كرافعة وبالكاد دحرجها الى القاعة وبذل فى ذلك جهدا عظيما . فوقعت القطعة النقدية العملاقة عند اقدام الامبراطور محدثة هديرا .

وكان تيرينسى مجهدا تماما .

وهمس قائلا :

— لا استطيع اكثر ... يكفى .

وكتم الامبراطور بصعوبة ضحكة الارتياح لمرأى حيلته وقد تكللت بالنجاح التام . وامر بان يحسب الخازن كم اخرج تيرينسى من البراسات الى قاعة الاستقبال .

قام الخازن بتنفيذ الامر وقال :

— ايها الحاكم نظرا لكرمك فان المقاتل الظافر تيرينسى اخذ كمكافأة **٢٦٢١٤٣** براسا .

وهكذا اعطى الامبراطور البخيل للقائد حوالى $\frac{١}{٢٠}$ من مبلغ المليون دينار الذى طلبه تيرينسى .

* * *

فلنراجع حساب الخازن وفى نفس الوقت وزن القطع النقدية . لقد اخرج تيرينسى ما يلى :

فى اليوم الاول	براس واحد	وزنه	٥ جم
فى اليوم الثانى	براسان اثنان	وزنهما	١٠ جم
فى اليوم الثالث	٤ براسات	وزنها	٢٠ جم
فى اليوم الرابع	٨ براسات	وزنها	٤٠ جم
فى اليوم الخامس	١٦ براسا	وزنها	٨٠ جم

فى اليوم السادس ٣٢ براسا وزنها ١٦٠ جم

فى اليوم السابع ٦٤ براسا وزنها ٣٢٠ جم

فى اليوم الثامن ١٢٨ براسا وزنها ٦٤٠ جم

فى اليوم التاسع ٢٥٦ براسا وزنها ١ كجم ٢٨٠ جم

فى اليوم العاشر ٥١٢ براسا وزنها ٢ كجم ٥٦٠ جم

فى اليوم الحادى عشر ١٠٢٤ براسا وزنها ٥ كجم ١٢٠ جم

فى اليوم الثانى عشر ٢٠٤٨ براسا وزنها ١٠ كجم ٢٤٠ جم

فى اليوم الثالث عشر ٤٠٩٦ براسا وزنها ٢٠ كجم ٤٨٠ جم

فى اليوم الرابع عشر ٨١٩٢ براسا وزنها ٤٠ كجم ٩٦٠ جم

فى اليوم الخامس عشر ١٦٣٨٤ براسا وزنها ٨١ كجم ٩٢٠ جم

فى اليوم السادس عشر ٣٢٧٦٨ براسا وزنها ١٦٣ كجم ٨٤٠ جم

فى اليوم السابع عشر ٦٥٥٣٦ براسا وزنها ٣٢٧ كجم ٦٨٠ جم

فى اليوم الثامن عشر ١٣١٠٧٢ براسا وزنها ٦٥٥ كجم ٣٦٠ جم

نحن نعرف كيف يمكن ببساطة حساب مجموع اعداد مثل هذه المتسلسلات : للعمود الثانى يساوى ٢٦٢١٤٣ تبعا للقاعدة المبينة على الصفحة ١٢٨ . طلب تيرينسى من الامبراطور مليون دينار اى ٥٠٠٠٠٠ براس وهذا يعنى انه قد حصل على اقل مما طلب بمقدار

$5\,000\,000 \div 262\,143 \approx 19$ مرة

٦٣ — اسطورة عن لوحة الشطرنج . لعبة الشطرنج واحدة من اقدم الالعاب . وهي توجد منذ عدة قرون وليس من المستغرب انه ترتبط بها اساطير كثيرة لا يمكن اختبار صحتها نظرا لانها كانت في قديم الزمان .

واريد الآن رواية احدى هذه الاساطير . لكي نتفهمها لا يلزم بتاتا ان تعرف لعبة الشطرنج ، ويكفي ان تعرف ان اللعبة تتم على لوحة مقسمة الى ٦٤ مربعا (سوداء وبيضاء على التوالي) .

١)

تم ابتكار لعبة الشطرنج في الهند وعندما تعرف الملك الهندي شيرام عليها اندهش لذكائها واختلاف الاوضاع الممكنة فيها .

وعندما علم الملك ان مخترعها من رعاياه امر باحضاره اليه لكي يكافئه شخصيا على فكرته الموفقة .

حضر المخترع ، وكان اسمه سيتا ، الى عرش الملك . لقد كان عالما بسيط الملبس ويكسب قوته بتعليم تلاميذه .

وقال الملك :

— انني اريد ان اكافئك يا سيتا على هذه اللعبة العظيمة التي اخترعتها .

وخرّ الحكيم ساجدا .

واضاف الملك يقول :

ـ اننى غنى بما فيه الكفاية لكى انفذ اشجع رغبة لديك . قل المكافأة التى ترضيك وستحصل عليها .

ولزم سيتا الصمت .

فشجعه القيصر قائلا :

ـ لا تخجل ، اذكر رغبتك . لن اضن بشىء لكى احققها لك .

ـ ان كرمك عظيم ايها الملك . ولكن اعطنى مهلة لافكر فى الاجابة . غدا سأخبرك ، بعد ان يختمر تفكيرى ، برغبتى .

عندما جاء سيتا فى اليوم الثانى الى مدرجات العرش ثانية ، ادهش القيصر بتواضع طلبه .

قال سيتا :

ـ ايها الملك ، أ أمر ان تعطى لى من اجل اول مربع من لوحة الشطرنج حبة قمح .

فدهش الملك وقال :

ـ حبة قمح عادية ؟

ـ نعم ايها الملك . وعن المربع الثانى أ أمر باعطائى حبتين ، وعن الثالث ٤ حبات وعن الرابع ـ ٨ حبات وعن الخامس ـ ١٦ حبة وعن السادس ـ ٣٢ حبة ..

وقاطعه القيصر متضايقا :

ـ يكفى ، ستأخذ الحبات عن جميع الـ ٦٤ مربعا للوحة تبعا لرغبتك ، عن كل مربع بمقدار ضعف ما اخذته عن المربع



شكل ٥٣ . «مقابل المربع الثانى أ أمر باعطائى حبتين»

السابق . ولكن اعلم ان رغبتك هذه غير جديرة بكرمى . انك بطلبك مثل هذه المكافأة التافهة تتجاهل كرمى بما ينم عن عدم الاحترام . والواقع انك كمعلم ، كان الاولى بك ان تكون قدوة حسنة فى احترام كرم ملكك . اذهب . وسيحمل لك خدمى كيس القمح .

وابتسم سيتا وخرج من القاعة ، واخذ ينتظر عند بوابة القصر .

٢)

تذكر الملك اثناء الغداء مخترع الشطرنج ، وبعث يسأل هل اخذ سيتا الطائش مكافأته البائسة ام لا .

وكانت الاجابة :

ـ ايها الملك ، امرك ينفذ . ويقوم رياضيو القصر بحساب عدد الحبوب اللازمة .

وعبس الملك . انه لم يتعود ان تنفذ اوامره بهذا البطء . وفى المساء سأل الملك عند انصرافه للنوم هل منذ زمن بعيد ترك سيتا باحة القصر مع كيسه من القمح . فاجابوه :

ـ ايها الملك ، ان رياضييك يعملون بدون كلل ، وهم يأملون ان ينتهوا من العمل قبل الفجر .

فسأل الملك بغضب :

ـ لماذا يبطئون فى عمل هذا ؟ لابد ان يعطى لسيتا غدا قبل ان استيقظ كل شىء حتى آخر حبة .

اننى لا اعيد اصدار اوامرى .

وفى الصباح قيل للملك ان كبير رياضيى القصر يرجو منه سماع شىء هام .

فامر الملك بادخاله .

قال شيرام :

ـ قبل ان تقول ما تريد اننى اريد ان اسمع هل اعطيت فى نهاية الامر لسيتا تلك المكافأة التافهة التى طلبها .

فاجابه الشيخ قائلا :

ـ من اجل ذلك تجرأت بالمثول بين يديك فى مثل هذه

الساعة المبكرة . لقد حسبنا بامعان كل عدد الحبوب التى يريد ان يحصل عليها سيتا . وان هذا العدد لضخم ..

فقاطعة الملك بغطرسة قائلا :

— مهما كان العدد ضخما . فلن تفتقر خزائنى . لابد وان تسلم المكافأة التى وعدت بها ...

— ليس فى سلطتك ايها الملك تنفيذ مثل هذه الرغبات . ففى كل خزائنك لا يوجد هذا العدد من الحبوب الذى طلبه سيتا . فلا يوجد مثل هذا العدد فى كل خزائن المملكة ، ولن يوجد فى كل الارض . ولو اردت ان تعطية المكافأة الموعودة فلتأمر بان تتحول ممالك الارض الى ارض للحرث ، وان تجفف البحار والمحيطات ، وان يزال الجليد والثلوج التى تغطى الصحارى الشمالية . فليكن كل ما فيها من ارض مزروعا بالقمح . وامر بان يعطى كل ما سينتج من هذه الحقول لسيتا . عندئذ سيأخذ مكافأته .

واستمع الملك بدهشة الى كلمات الشيخ .

وقال وهو غارق فى التفكير :

— اذكر لى هذا العدد العجيب .

— ثمانية عشر كوينتليونا واربعمائة وستة واربعون كوادرليونا وسبعمائة واربعة واربعون تريليونا وسبعمائة وثلاثة بليونا وسبعمائة وتسعة ملايين وخمسمائة وواحد وخمسون الف وستمائة وخمس عشرة حبة ، يامولاى !

٣)

هذه هى الاسطورة . ولا يعرف فيما اذا كان ما ورد هنا حقيقة واقعة ، ولكن المكافأة التى تتحدث عنها الاسطورة كان لابد ان يعبر عنها بهذا الرقم فعلا . ويمكن ان تتأكد من ذلك بنفسك اذا قمت بالحساب بصبر .

اذا ابتدأنا بالواحد الصحيح فيلزمنا جمع الاعداد ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ .. الخ . وتبين نتيجة الـ ٦٣ مضاعفة كم يكون للمخترع مقابل المربع الرابع والستين فى اللوحة . بالعمل كما هو مبين على ٨٢١ نجد بدون مجهود مجموع كل الحبوب قيد البحث اذا ما ضاعفنا العدد الاخير وطرحنا منه الواحد الصحيح . وهذا يعنى ان كل الحساب يتركز فى ضرب الرقم اثنين ٦٤ مرة :

٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ .. الخ (٦٤ مرة)

لكى نسهل العملية سنقسم هذه الـ ٦٤ حدا للضرب الى ٦ مجموعات يكرر الرقم اثنين فى كل منها ١٠ مرات وتكون المجموعة الاخيرة مؤلفة من ٤ اثنانات . من السهل التأكد ان حاصل ضرب ١٠ اثنانات يساوى ١٠٢٤ ، والـ ٤ اثنانات يساوى ١٦ . هذا يعنى ان النتيجة تساوى :

١٠٢٤ × ١٠٢٤ × ١٠٢٤ × ١٠٢٤ × ١٠٢٤ × ١٠٢٤ × ١٦

بضرب ١٠٢٤ × ١٠٢٤ نحصل على ١٠٤٨٥٧٦

والآن يبقى ان نوجد

$$١٠٤٨٥٧٦ \times ١٠٤٨٥٧٦ \times ١٠٤٨٥٧٦ \times ١٦$$

ونطرح من النتيجة الواحد الصحيح ، فنحصل على العدد المطلوب من الحبوب :

$$١٨ ٤٤٦ ٧٤٤ ٠٧٣ ٧٠٩ ٥٥١ ٦١٥$$

لو اردت ان تتخيل ضخامة هذا العملاق العددى ، فلتحسب حجم مخزن الحبوب اللازم لاستيعاب مثل تلك الكمية من الحبوب . علما بان المتر المكعب من القمح يحتوى على ما يقرب من ١٥ مليون حبة . وهذا يعنى ان مكافأة مخترع الشطرنج يجب ان تشغل مكانا يبلغ حجمه ١٢ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ متر مكعب او ١٢ ٠٠٠ كيلومتر مكعب . واذا كان ارتفاع المخزن ٤ م وعرضه ١٠ م لوجب ان يمتد لمسافة ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ كيلومتر ، اى اكبر بمرتين من المسافة من الارض الى الشمس .

ولم يكن الملك الهندى ليستطيع ان يقدم مثل هذه المكافأة . ولكنه كان يستطيع لو كان قويا فى الرياضيات ان يتحرر من مثل هذا الدين الثقيل . من اجل ذلك كان يجب فقط ان يقترح على سيتا ان يحسب بنفسه حبة حبة كل نصيبه من القمح .

وفعلا ، فلو اخذ سيتا على عاتقه عملية الحساب وقام بها ليلا ونهارا بدون راحة على ان يعد حبة كل ثانية فانه فى اليوم الاول كان

سيعد ٨٦٤٠٠ حبة ، ولكى يحسب مليون حبة كان يلزمه ما لا يقل عن ١٠ ايام من الحساب المستمر ، وكان سيحسب المتر المكعب الواحد من الحبوب فى نصف عام ، وهذا كان يعطية ٥ ارباع فقط . واذا كان قد قام بالعد بدون راحة خلال ١٠ سنوات لحسب ما لا يزيد عن ١٠٠ ربع . وانت ترى انه حتى لو مكث بقية عمره يحسب فانه كان سيحصل على جزء ضئيل من المكافأة التى طلبها لنفسه .

٦٤ – التكاثر السريع . رأس ثمرة خشخاش مليئة بالبذور الصغيرة : يمكن من كل حبة أن ينمو نبات كامل . كم عدد رؤوس ثمار الخشخاش التى سنحصل عليها اذا نبتت كل الحبوب ؟ لمعرفة ذلك يلزم ان نعد عدد البذور فى الرأس الكاملة . انها عملية مملة ، ولكن النتيجة مثيرة جدا بحيث تستأهل ان نصبر ونقوم بالعد حتى النهاية . يتضح ان رأسا واحدة من الخشخاش تحتوى على ٣٠٠٠ حبة تقريبا .

وماذا يعنى هذا ؟ يعنى انه اذا كان حول نبات الخشخاش مساحة كافية من الارض الجيدة فانه يمكن ان ينمو النبات من كل حبة تقع ، وفى الصيف التالى سينبت فى نفس هذا المكان ٣٠٠٠ نبات خشخاش اى حقل كامل منه ، وذلك من رأس واحدة .

فلننظر ماذا بعد ذلك . ان كل نبتة واحدة من ٣٠٠٠ نبات ستنبت ما لا يقل عن رأس واحدة (الاغلب ان تكون هناك عدة

رؤوس) وفى كل رأس ٣٠٠٠ حبة . وبنموه فان بذور الرأس الواحد تعطى ٣٠٠٠ من النباتات الجديدة . وبالتالى سيكون لدينا فى السنة الثانية ما لا يقل عن :

٣٠٠٠ × ٣٠٠٠ = ٩ ٠٠٠ ٠٠٠ نبات

ومن السهل حساب انه فى السنة الثالثة سيصل عدد سلالة رأس الخشخاش الواحد الذى كان لدينا اولا الى :

٩ ٠٠٠ ٠٠٠ × ٣ ٠٠٠ = ٢٧ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

وفى السنة الرابعة

٢٧ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ × ٣ ٠٠٠ = ٨١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

وفى السنة الخامسة ستضيق الكرة الارضية بهذه النباتات لان عددها سيكون

٨١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ × ٣٠٠٠ = ٢٤٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

فان سطح كل اليابسة من الارض ، اى مساحة كل القارات والجزر على الكرة الارضية ، يبلغ ١٣٥ مليون كيلومتر مربع فقط اى ١٣٥ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ م^{٢} وتقريبا فى ٢٠٠٠ مرة اقل من عدد نباتات الخشخاش التى نبتت .

وانتم ترون انه اذا نبتت كل حبات الخشخاش فان سلالة نبات واحد كانت تستطيع خلال خمسة اعوام ان تغطى كل اليابسة بنباتات كثيفة فى حدود الفى نبات فى كل متر مربع . ها هو ذى العملاق العددى الذى يكمن فى بذرة الخشخاش الصغيرة .

لو اجرينا نفس الحساب على نبات آخر غير الخشخاش ذى بذور اقل فى العدد لوصلنا الى نتيجة مشابهة ، ولكن سلالته كانت ستغطى الارض لا خلال خمس سنوات ولكن فى وقت اطول بقليل . فلنأخذ على سبيل المثال نبات الهندباء البرية الذى يعطى كل سنة ما يقرب من ١٠٠ بذرة * . فلو انها نبتت كلها لحصلنا على :

فى السنة الاولى	نبات واحد	نبات
فى السنة الثانية	١٠٠	نبات
فى السنة الثالثة	١٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة الرابعة	١ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة الخامسة	١٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة السادسة	١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة السابعة	١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة الثامنة	١٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات
فى السنة التاسعة	١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠	نبات

* فى احد رؤوس الهندباء البرية وجد حتى ٢٠٠ بذرة .

وهذا يزيد ب ٧٠ مرة على ما هو موجود من الامتار المربعة على كل اليابسة .

وبالتالى ففى العام التاسع كان نبات الهندباء البرية (سن الاسد) سيغطى الارض بمعدل ٧٠ نباتا فى كل متر مربع .

لماذا لا نلاحظ فى الواقع مثل هذا التكاثر السريع ؟ لان الاكثرية العظمى من البذور تموت دون ان تعطى نباتات صغيرة : فهى اما لا تقع على ارض صالحة وبالتالى لا تنمو ابدا ، او انها عندما تبدأ النمو تطغى عليها نباتات اخرى او اخيرا تدوسها الحيوانات . ولكن لو لم يحدث هذا الافناء الجماعى للبذور والنباتات الصغيرة لغطى كل نبات كوكبنا باجمعه فى زمن قصير .

ولا يصح هذا بالنسبة للنباتات فقط ولكن بالنسبة للحيوانات ايضا . فلولا الموت لغطت كل الارض سلالة زوج واحد من اى من الحيوانات عاجلا او آجلا . ان جحافل الجراد التى تغطى مساحة واسعة من الارض يمكن ان تعطى لنا صورة عما يمكن ان يحدث لو لم يعرقل الموت تكاثر الكائنات الحية . لتغطت القارات خلال ثلاثين او اربعين سنة بغابات كثيفة وبرارى تعج بملايين الحيوانات التى تتصارع فيما بينها من اجل المكان . ولامتلأ المحيط بالسمك بكثافة بحيث يصبح مرور السفن امرا مستحيلا . ولاصبح الهواء غير شفاف من كثرة الطيور والحشرات . فلننظر كمثال ، كيف تتكاثر الذبابة المعروفة للجميع . فلنفرض ان كل ذبابة تضع ١٢٠

بيضة ولنفرض انه خلال الصيف تلحق ٧ اجيال من الذباب فى الظهور نصفها اناث . ولنفترض ان اول وضع كان فى ١٥ ابريل وسنحسب ان الذبابة الانثى تكبر خلال ٢٠ يوما لدرجة انه نفسها تضع البيض . عند ذلك يتم التكاثر كالآتى :

فى ١٥ ابريل — وضعت الانثى ١٢٠ بيضة ، وفى بداية مايو تفقست ١٢٠ ذبابة ، منها ٦٠ انثى .

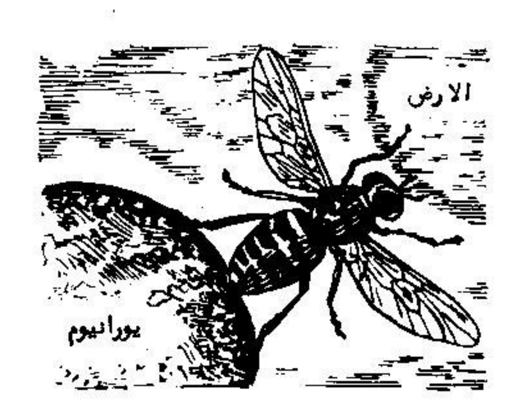
فى ٥ مايو — وضعت كل انثى ١٢٠ بيضة ، وفى منتصف مايو تفقست ٦٠ × ١٢٠ = ٧٢٠٠ ذبابة ، منها ٣٦٠٠ انثى .

فى ٢٥ مايو — كل واحدة من ٣٦٠٠ انثى وضعت ١٢٠ بيضة ، وفى بداية يونيو تفقست ٣٦٠٠ × ١٢٠ = ٠٠٠ ٤٣٢ ذبابة ، منها ٠٠٠ ٢١٦ انثى .

فى ١٤ يونيو كل انثى من الـ ٠٠٠ ٢١٦ انثى وضعت ١٢٠ بيضة ، وفى نهاية يونيو تفقست ٠٠٠ ٩٢٠ ٢٥ ذبابة منها ٠٠٠ ٩٦٠ ١٢ انثى .

فى ٥ يوليو — تضع كل واحدة من ٠٠٠ ٩٦٠ ١٢ انثى ١٢٠ بيضة ، وفى يوليو تفقست ٠٠٠ ٢٠٠ ٥٥٥ ١ ذبابة منها ٠٠٠ ٦٠٠ ٧٧٧ انثى .

فى ٢٥ يوليو — تفقست ٠٠٠ ٠٠٠ ٣١٢ ٩٣ ذبابة منها ٠٠٠ ٠٠٠ ٦٥٦ ٤٦ انثى .



شكل ٥٤ . كان يمكن ان يوضع نسل الذبابة خلال صيف واحد فى خط من الارض حتى الكوكب يورانيوم

فى ١٣ اغسطس – تفقست ٥ ٥٩٨ ٧٢٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ذبابة منها ٢ ٧٩٩ ٣٦٠ ٠٠٠ ٠٠٠ انثى .

فى اول سبتمبر – تفقست ٣٥٥ ٩٢٣ ٢٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ انثى .

لكى نتخيل بصورة اوضح هذه الكتلة الضخمة من الذباب التى كانت تستطيع ان تولد خلال صيف واحد عند التكاثر غير المعاق لزوج واحد ، ولنتخيل انها وقفت فى خط مستقيم كل واحدة بجانب الاخرى ، بما ان طول الذبابة ٥ مم فان كل هذا الذباب كان سيمتد على طول ٢٥٠٠ مليون كيلومتر ، اى بمقدار يزيد ١٨ مرة على المسافة من الارض حتى الشمس (اى ما يقرب من المسافة من الارض حتى كوكب يورانيوم البعيد) ...

فى الختام سنورد بعض الحالات الحقيقية للتكاثر السريع الخارق للمألوف للحيوانات التى بدأت العيش فى ظروف مناسبة .

لم تكن فى امريكا عصافير فى البداية . فقد جلب هذا الطائر المألوف لدينا الى الولايات المتحدة عمدا بهدف القضاء على الحشرات الضارة . والعصفور ، كما هو معروف ، يأكل كثيرا من الاساريع الاكولة والحشرات الاخرى التى تضر الحدائق والبساتين . والفت العصافير الظروف الجديدة : فلم يكن فى امريكا كواسر تهلك هذه الطيور واصبح العصفور يتكاثر بسرعة . وبدأت كمية الحشرات الضارة تقل بشكل ملحوظ ولكن سرعان ما تكاثرت العصافير ولقلة الطعام الحيوانى اخذت تأكل النباتات واصبحت تخرب الزرع * . وبرزت الحاجة لمكافحة العصافير ، ولقد كلفت هذه المكافحة الامريكيين غاليا لدرجة انه صدر للمستقبل قانون يمنع ادخال اى حيوانات الى امريكا .

المثال الثانى . لم تعرف الارانب فى استراليا عندما اكتشف الاوروبيون هذه القارة وادخل الارنب الى هناك فى نهاية القرن الثامن عشر . وبما انه لم تكن هناك وحوش تتغذى على الارانب فقد تم تكاثر هذه القوارض بوتائر سريعة للغاية . وسرعان ما فاض جيش الارانب الضخم على كل استراليا واحدث اضرارا كبيرة على

---

* فى جزر هاواى طردت العصافير كل الطيور الصغيرة الاخرى تماما .

الزراعة وتحول الى كارثة حقيقية . وقد وجهت اموال طائلة لمكافحة الآفة الزراعية هذه وامكن بفضل التدابير النشطة فقط التغلب على هذه الكارثة . وتكرر نفس الشيء تقريبا بعد ذلك مع الارانب فى كاليفورنيا .

والحادثة الثالثة ذات الدلالة حدثت فى جزيرة جامايكا . فقد وجدت فيها بكثرة الثعابين السامة . وللتخلص منها تقرر ادخال الطائر – السكرتير الى الجزيرة الذى يعتبر عدوا لا يشق له غبار للثعابين السامة . وتناقص عدد الثعابين سريعا فعلا ولكن تكاثرت بشكل غير عادى جرذان الحقل والتى كانت الثعابين تقتات عليها من قبل . ولقد احدثت الجرذان اضرارا كبيرة لمزارع قصب السكر مما ادى الى التفكير جديا فى القضاء عليها . من المعروف ان عدو الجرذان هو المانجوست الهندى . فتقرر جلب ٤ ازواج منه الى الجزيرة واعطاؤها حرية التكاثر . لقد تأقلم المانجوست مع الوطن الجديد وبسرعة سكنوا فى كل الجزيرة. ولم تمض عشر سنوات حتى قضت تقريبا على كل الجرذان ولكن للاسف اصبح المانجوست يتغذى على اى شيء يقع امامه بعد القضاء على الجرذان ، وصار من الحيوانات التى تأكل كل شيء ، فهاجمت الكلاب الصغيرة ، والماعز ، والخنازير والطيور المنزلية وبيضها . وبازدياد عددها اخذت تهاجم الحدائق وحقول القمح والبساتين . وابتدأ السكان فى القضاء على حلفائهم القريبين ولكنهم استطاعوا فقط لدرجة معينة ان يحدوا من الضرر الذى سببه المانجوست .

٦٥ ــ غذاء مجانى . قرر عشرة شبان الاحتفال بالتخرج من المدرسة الثانوية بتناول الغداء فى احد المطاعم . عندما اجتمع شملهم وقدم الطبق الاول ، اختلفوا حول كيفية او وضع جلوسهم حول المائدة . فاقترح بعضهم ان يجلسوا تبعا لابجدية الاسماء ، بينما اقترح آخرون ان يجلسوا تبعا للسن ، واقترح فريق ثالث ان يجلسوا تبعا لدرجاتهم فى الدراسة ، والفريق الرابع ــ تبعا للطول ... الخ . وطال النقاش ، وبرد الحساء ولم يجلس احد حول المائدة . وصالحهم الجرسون الذى توجه اليهم بالحديث التالى :

ــ ايها الاصدقاء الشباب ، اتركوا مشاجراتكم . اجلسوا حول المائدة كيفما اتفق ، واستمعوا الى .

وجلس الجميع كيفما اتفق واستطرد الجرسون قائلا :

ــ دع احدكم يكتب باى نظام تجلسون الآن . وغدا ستحضرون الى هنا للغداء ايضا وستجلسون فى نظام آخر . وبعد غد ستجلسون بطريقة اخرى ... الخ الى ان تجربوا كل التوزيعات الممكنة . وعندما ياتى الدور لكى تجلسوا كما تجلسون الآن هنا ، عندئذ أعدكم وعد حق ، بان ابدأ كل يوم بتقديم اطيب انواع الطعام لكم مجانا .

واعجبهم الاقتراح . وتقرر ان يجتمعوا كل يوم فى هذا المطعم وتجربة كل طرق التوزيع حول المائدة ، لكى يبدأ وبسرعة تناول وجبات الغداء المجانية .

ولكن لم يحل هذا اليوم ، ليس لان الجرسون لم يف بوعده ، ولكن لان عدد التوزيعات الممكنة حول المائدة كان كبيرا للغاية . فهى تساوى لا اكثر ولا اقل من ٣٦٢٨٨٠٠ . ويبلغ هذا العدد من الايام ، مهما كان الحساب سهلا ، ٠٠٠ ١٠ سنة تقريبا .

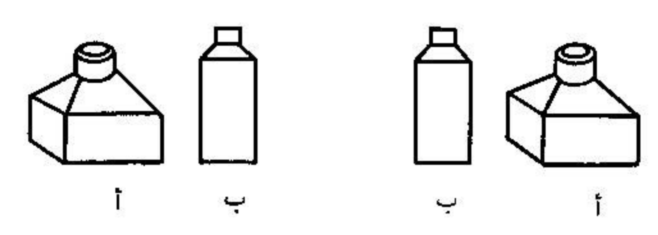
وقد يبدو لكم انه من غير المحتمل ان يستطيع ١٠ اشخاص التوزع بمثل هذا العدد الكبير من الطرق المختلفة . فلتراجع الحساب بنفسك .

قبل كل شىء يلزم ان تتعلم تحديد عدد التبادلات . وللتسهيل سنبدأ بحساب عدد صغير من الاشياء — من ثلاثة . سنسميهم أ ، ب ، ج .

نحن نريد ان نعرف بكم طريقة يمكن تغيير ترتيب كل واحد فى مكان الآخر . سنناقش ذلك كالآتى . لو تركنا مؤقتا الشىء ج ، فان الشيئين الآخرين يمكن وضعهما بطريقتين فقط .

والآن سنضم الشىء ج الى كل من هذه الازواج . ونستطيع ان نفعل ذلك بطرق ثلاث : اذ نستطيع :

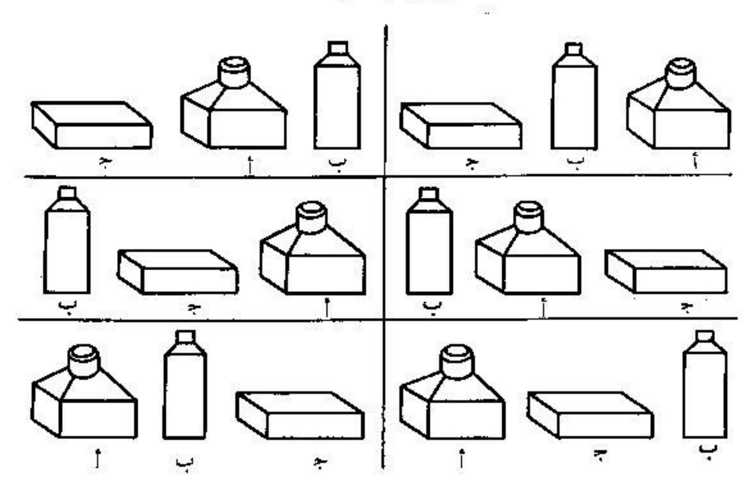
١) وضع ج خلف الزوج .
٢) وضع ج امام الزوج .
٣) وضع ج ما بين الشيئين .



شكل ٥٥ . شيئان يمكن وضعهما بطريقتين فقط

ومن الواضح انه لا توجد اوضاع اخرى للشيء ج عدا هذه الاوضاع . وبما ان لدينا الزوجين أ ب و ب أ ، فان كل طرق توزيعات الاشياء ستكون :

$$٢ \times ٣ = ٦$$



شكل ٥٦ . ثلاثة اشياء يمكن وضعها بست طرق

وهذه الطرق مبينة على الشكل ٥٦ .

فلنواصل العملية ، ونحسب الاوضاع لاربعة اشياء .

لنفرض ان لدينا اربعة اشياء أ ، ب ، ج ، د . ومرة اخرى سنضع جانبا مؤقتا شيئا واحدا ، ليكن د ، ونجرى على الاشياء الثلاثة الباقية كل التغييرات الممكنة . نحن نعلم الآن ان عدد هذه التغييرات ستة . بكم من الطرق يمكن اضافة الشيء الرابع د الى كل من الثلاثات الستة ؟ من الواضح ان هذا ممكن باربع طرق : فيمكن :

١) وضع د خلف الثلاثة ؛

٢) وضع د امام الثلاثة ؛

٣) وضع د ما بين الشيئين الاول والثانى ؛

٤) وضع د ما بين الشيئين الثانى والثالث .

ونحصل بالتالى على ما مجموعه :

$$٤ \times ٦ = ٢٤ \text{ تغييرا}$$

وبما ان ٦ = ٢ × ٣ و ٢ = ١ × ٢ فان عدد كل التغييرات التى يمكن تصورها فى شكل حاصل الضرب :

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = ٢٤$$

اذا واصلنا الاستدلال بنفس الطريقة فى حالة ٥ اشياء سنعرف ان عدد التغييرات فيها سيكون مساويا :

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ١٢٠$$

وتكون التغييرات بالنسبة لـ ٦ اشياء :

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٧٢٠ تغييرا وهكذا

فلنعد الآن الى قصة الافراد العشرة الذين يتناولون الغداء فى المطعم . فسيتحدد عدد التغييرات هنا لو اجهدنا نفسنا فى حساب حاصل الضرب :

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ × ٨ × ٩ × ١٠

عندئذ نحصل على العدد المذكور اعلاه وهو :

٣٦٢٨٨٠٠

ولكان الحساب اصعب اذا ما كان هناك وسط الاشخاص العشرة الجالسين وراء مائدة الغداء ٥ بنات واردن ان يجلس حول المائدة بحيث يتناوبن فى الجلوس مع الشباب . وعلى الرغم من ان عدد التغييرات الممكنة هنا اقل بكثير فان حسابها اصعب بعض الشىء .

فلنفرض انه يجلس احد الشباب وراء المائدة — كيفما اتفق . عندئذ يستطيع الاربعة الباقون ان يتوزعوا فى الجلوس مع ترك كراسى خالية للبنات بين كل واحد والآخر بـ ١ × ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤ طريقة مختلفة . بما ان عدد الكراسى ١٠ ، فان اول شاب يستطيع ان يجلس بـ ١٠ طرق . وهذا يعنى ان عدد كل التغييرات الممكنة للشباب هو ١٠ × ٢٤ = ٢٤٠ تغييرا .

بكم طريقة يمكن ان تجلس الخمس بنات على الكراسى الخالية بين الشباب ؟ من الواضح انها ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ١٢٠ طريقة . وبحساب كل من الـ ٢٤٠ وضعا التى يتخذها الشباب مع كل من الـ ١٢٠ وضعا للبنات نحصل على عدد كل التوزيعات الممكنة وهو :

$$٢٤٠ \times ١٢٠ = ٢٨٨٠٠$$

ان هذا العدد اصغر بعدة مرات من العدد السابق ، ففى هذه المرة يلزم فقط ٧٩ سنة (الا قليلا) . لو ان رواد المطعم الشباب عاشوا حتى عمر المائة عام لاستطاعوا الحصول على الغداء المجانى ليس من نفس الجرسون ولكن ممن سيخلفوه .

نستطيع الآن بمعرفة حساب التبديلات تحديد كم من الاوضاع المختلفة لحجر الداما يمكن فى علبة لعبة « الـ ١٥ » * . بالاحرى نحن نستطيع حساب عدد كل المسائل التى تستطيع ان تقترحها علينا هذه اللعبة . ومن السهل ادراك ان الحساب يؤدى الى تحديد عدد التبديلات من ١٥ شيئا . نحن نعرف الآن انه لتحديد ذلك يلزم ضرب :

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ... \times ١٤ \times ١٥$$

---

* عند ذلك يجب ان يبقى المربع الخالى فى الزاوية اليسرى السفلى دائما .

ويعطينا الحساب النتيجة التالية .

١ ٣٠٧ ٦٧٤ ٣٦٥ ٠٠٠

اى اكثر من التريليون .

ان نصف هذا العدد الضخم من المسائل غير قابل للحل . ومعنى ذلك انه يوجد اكثر من ٦٠٠ مليار من الاوضاع غير المحلولة فى هذه اللعبة . من هنا يفهم هذا الوباء فى الولوع بلعبة « ال ١٥ » الذى اصاب الناس الذين لم يشكوا فى وجود مثل هذا العدد الضخم من الحالات التى لا تحل .

لنلاحظ ايضا ، انه لو كان من الممكن ان نكسب حجر الداما وضعا جديدا كل ثانية ، لاحتجنا لكى نجرب كل الاوضاع الممكنة ، عند العمل المستمر فى اليوم بطوله ، الى اكثر من ٤٠٠٠٠ سنة .

وفى ختام حديثنا عن عدد التبديلات سنحل هذه المسألة من الحياة المدرسية .

يوجد فى قاعة الدرس ٢٥ تلميذا . بكم طريقة يمكن اجلاسهم على المقاعد الدراسية ؟

ان حل هذه المسألة — لمن استوعب كل ما اوردناه من قبل — غير معقد بتاتا : فيلزم ضرب ٢٥ من مثل هذه الاعداد :

٢٥ × ٢٤ × ٢٣ × ... × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

وتبين الرياضيات طرق اختصار كثير من الحسابات ، ولكنها لا تستطيع تسهيل الحسابات المماثلة التى اوردناها الآن . ولا توجد اية طريقة اخرى لاجراء هذا الحساب بدقة كضرب كل الاعداد* بدقة متناهية .

ان التجميع الموفق للحدود وحده يسمح بعض الشيء باختصار زمن الحساب . والنتيجة التى نحصل عليها ضخمة اذ تتألف من ٢٦ رقما — وهو عدد لا يمكن لخيالنا ان يتصور مقداره .

واليك هذا العدد :

١٥ ٥١١ ٢١٠ ٠٤٣ ٣٣٠ ٩٨٥ ٩٨٤ ٠٠٠ ٠٠٠

---

* غير ان هذا الحساب يمكن أن يتم بالتقريب نسبيا بدون تعقيد . فكثيرا ما نجد فى الرياضيات الحاجة لحساب حاصل ضرب الاعداد الحقيقية من واحد الى أحد الاعداد مثل ن . ويرمز لحاصل الضرب هذا بالرمز ن ! ويسمى ب ن — فاكتوريال . وعلى سبيل المثال فانه يمكن ان يرمز لحاصل الضرب المذكور اعلاه ، باختصار ، بالرمز ٢٥ ! فى القرن الثامن عشر وضع العالم الرياضى الانجليزى ستيرلنج معادلة تسمح بالتقريب بحساب الفاكتوريال . وتكتب هذه المعادلة بالشكل الآتى :

$$ن! \approx \sqrt{٢ ط ن} \left(\frac{ن}{هـ}\right)^{ن}$$

حيث ط ≈ ٣,١٤١ ، هـ ≈ ٢,٧١٨ — عددان يلعبان دورا هاما فى مسائل الرياضيات المختلفة . وباستخدام جدول اللوغاريتمات من السهل الحصول بواسطة معادلة ستيرلنج على :

$$٢٥! \approx ١,٥٥ \times ١٠^{٢٥}$$

ان هذا العدد يعتبر ، طبعا ، من اضخم الاعداد التى قابلتنا حتى الآن ـ وله الحق قبل الاعداد الاخرى فى ان يسمى « بالعدد العملاق » . وعدد القطرات الدقيقة جدا فى كل المحيطات والبحار على الكرة الارضية يعتبر قليلا اذا ماقورن بهذا العدد العملاق .

٦٦ ـ نقل القطع النقدية : عندما كنت طفلا ارانى اخى الاكبر ، كما اذكر ، اللعبة المشهورة للقطع النقدية . فوضع ثلاثة اطباق بجانب بعضها البعض ، ووضعت فى الطبق الاخير (الطرفى) كومة مؤلفة من ٥ قطع نقدية : فى الاسفل روبل وفوقه ٥٠ كوبيكا ثم ٢٠ كوبيكا ثم ١٥ كوبيكا وفى الاعلى ١٠ كوبيكات .

ـ يجب نقل هذه القطع النقدية الى الطبق الثالث مع المحافظة على القواعد الثلاث الآتية : القاعدة الاولى : ـ ان تنقل لمرة واحدة قطعة نقدية واحدة . القاعدة الثانية : الا تضع القطعة النقدية الكبرى فوق الصغرى . القاعدة الثالثة : يمكن مؤقتا وضع القطع النقدية فى الطبق الاوسط مع المحافظة على القاعدتين السابقتين ، ولكن فى نهاية اللعبة يجب ان تكون كل القطع النقدية فى الطبق الثالث بنفس النظام الذى كان اولا . والقواعد ، كما ترى ، ليست معقدة . والآن فلنبدأ العمل .

بدأت باعادة وضع قطع النقود . فوضعت الـ ١٠ كوبيكات فى الطبق الثالث والـ ١٥ كوبيكا فى الطبق الاوسط واحترت اين

اضع الـ ٢٠ كوبيكا ؟ انها اكبر من الـ ١٠ كوبيكات ومن الـ ١٥ كوبيكا .

واغاثنى اخى قائلا :

ــ كيف الحال ؟ ضع العشرة كوبيكات فى الطبق الاوسط فوق الـ ١٥ كوبيكا . عندئذ سيخلو الطبق الثالث للعشرين كوبيكا .

وفعلت ذلك . ولكن برزت بعدها ــ صعوبة اخرى . اين اضع القطعة النقدية ذات الـ ٥٠ كوبيكا ؟ غير اننى تنبهت بسرعة ونقلت اولا الـ ١٠ كوبيكات الى الطبق الاول والـ ١٥ كوبيكا الى الطبق الثالث ، ثم الـ ١٠ كوبيكات ايضا الى الطبق الثالث . الآن يمكن ان توضع القطعة النقدية من فئة ٥٠ كوبيكا على الطبق الاوسط الخالى . ثم بعد سلسلة طويلة من النقلات استطعت ايضا ان انقل القطعة النقدية من فئة الروبل من الطبق الاول ، وفى النهاية جمعت كل كومة القطع النقدية فى الطبق الثالث .

سأل اخى مستحسنا ما قمت به :

ــ كم عدد جميع النقلات لديك ؟

ــ لم اعدها .

ــ فلنعدها . أليس من الطريف ان تعرف ما هو اصغر عدد للحركات يكفل بلوغ الهدف . واذا ما كانت الكومة مؤلفة ليس من ٥ قطع ولكن من قطعتى نقود فقط هى من فئة ١٥ كوبيكا و ١٠ كوبيكات ، فكم عدد الحركات التى وجب القيام بها ؟

ـ ثلاثة : تنقل الـ ١٠ كوبيكات الى الطبق الاوسط ، تنقل الـ ١٥ كوبيكا الى الطبق الثالث ، ثم تنقل الـ ١٠ كوبيكات الى الطبق الثالث .

ـ صحيح . فلنضف الآن قطعة نقدية اخرى من فئة الـ ٢٠ كوبيكا ، ونحسب بعد كم حركة يمكن نقل الكومة من هذه القطع النقدية . سنفعل الآتى : سننقل اولا وعلى التوالى القطعتين النقديتين الصغريين الى الطبق الاوسط . ان ذلك يتطلب ، كما نعرف ، اجراء ٣ حركات . ثم ننقل القطعة النقدية من فئة الـ ٢٠ كوبيكا الى الطبق الثالث الخالى ـ بحركة واحدة . وعندما ننقل القطعتين النقديتين من الطبق الاوسط ايضا الى الطبق الثالث ـ نقوم بـ ٣ حركات . ويكون مجموع كافة الحركات ٣ + ١ + ٣ = ٧ .

ـ اما عدد الحركات بالنسبة لاربع قطع نقدية فاسمح لى ان اعدها بنفسى . اولا سانقل القطع النقدية الصغرى الثلاث الى الطبق المتوسط ـ ٧ حركات ، ثم انقل الـ ٥٠ كوبيكا الى الطبق الثالث ـ بحركة واحدة ثم انقل القطع الصغرى الثلاث الى الطبق الثالث مرة اخرى ـ بـ ٧ حركات اخرى ، فالمجموع يكون ٧ + ١ + ٧ = ١٥ .

ـ ممتاز . وكيف الامر بالنسبة لخمس قطع نقدية ؟

فاجبته فورا :

ـ ١٥ + ١ + ١٥ = ٣١ حركة .

— حسنا لقد فهمت طريقة الحساب . ولكننى ساريك كيف يمكن تبسيطها اكثر . لاحظ ان الاعداد التى حصلنا عليها ٣ ، ٧ ، ١٥ ، ٣١ تمثل كلها اثنين مضروبة فى نفسها مرة او عدة مرات ، ولكن يطرح الواحد الصحيح . انظر :

وكتب اخى الجدول التالى :

٣ = ٢ × ٢ — ١

٧ = ٢ × ٢ × ٢ — ١

١٥ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ — ١

٣١ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ — ١

— انا افهم ما تقول فان عدد القطع النقدية التى تنقل ، يكون مساويا لعدد ضرب الاثنين فى نفسها ثم يطرح الواحد الصحيح . واستطيع الآن ان احسب عدد حركات اية كومة من النقود . فمثلا بالنسبة لسبع قطع نقدية :

٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ — ١ = ١٢٨ — ١ = ١٢٧

— ها قد فهمت هذه اللعبة القديمة . لكن يجب ان تعرف قاعدة عملية واحدة هى : اذا كان عدد القطع النقدية فى الكومة فرديا فان اول قطعة نقدية تنقل الى الطبق الثالث ، اما اذا كان زوجيا فتنقل الى الطبق الاوسط .

— لقد قلت : اللعبة القديمة . الم تبتدعها انت نفسك ؟



شكل ٥٧ . لا بد وان يقوم الكهنة بنقل الحلقات بلا كلل

ــ لا ، لقد اجريتها باستخدام القطع النقدية لا غير . اما اللعبة فقديمة ويقال انها ولدت فى الهند . وهناك اسطورة طريفة حول هذه اللعبة . ويزعم انه يوجد فى مدينة بيناريس معبد اقام فيه الاله الهندى براهما عند خلق الكون ثلاثة عصيات من الالماس ووضع على احداها ٦٤ حلقة ذهبية : كبراهن فى الاسفل ، وكل حلقة تالية اصغر من سابقتها . ووجب على كهنة المعبد ان يقوموا بنقل الحلقات بلا كلل نهارا وليلا من احدى العصيات الى الثانية مع استخدام العصية الثالثة كمساعدة وبالمحافظة على قواعد لعبتنا بان ينقلوا فى المرة الواحدة حلقة واحدة فقط وعدم جواز وضع

الكبرى فوق الصغرى . وتقول الاسطورة انه عندما ستنقل اا ٦٤ حلقة ستحل نهاية العالم .

— اوه ، هذا يعنى لو صدقنا هذه الاسطورة لكان العالم يجب ان يفنى منذ زمن بعيد .

— اظن انك تعتقد ان نقل ٦٤ حلقة لا يتطلب وقتا طويلا ؟

— طبعا ، فلو اجرينا حركة فى كل ثانية ، لامكن فى الساعة الواحدة اجراء ٣٦٠٠ نقلة .

— حسنا ، ثم ماذا ؟

— اى نجرى فى يوم كامل حوالى مائة الف نقلة . وفى عشرة ايام — مليون نقلة . انا واثق انه بمليون خطوة ممكن ان ننقل حتى الف حلقة .

— لقد اخطأت ، فلكى ننقل ٦٤ حلقة فقط نحتاج الى ٥٠٠ مليار سنة تقريبا !

— ولكن ما السبب ؟ اليس عدد الخطوات يساوى حاصل ضرب ٦٤ اثنين ناقصا الواحد ، وهذا يبلغ .. مهلا ، سأقوم بعملية الضرب الآن !

— عظيم . ما دمت مشغولا بذلك ، فيمكننى الذهاب لاداء بعض الاعمال .

ذهب اخى ، وتركنى غارقا فى الحسابات . فوجدت اولا حاصل ضرب ١٦ اثنين ، ثم ضربت هذه النتيجة — ٦٥٥٣٦ — فى نفسها ،

وما نتج عن ذلك ضربته مرة ثانية فى نفسه ، ولم انس ان اطرح الواحد الصحيح .

وحصلت على العدد الآتى :

١٨ ٤٤٦ ٧٤٤ ٠٧٣ ٧٠٩ ٥٥١ ٦١٥ *

اذن ، كان اخى على حق ..

ربما يهمكم ان تعرفوا باى الاعداد يتحدد عمر العالم . وتوجد لدى العلماء فى هذا المجال بعض المعطيات المقربة طبعا .

يبلغ عمر الشمس ٥ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ سنة
يبلغ عمر الكرة الارضية ٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ سنة
يبلغ عمر الحياة على الارض ١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ سنة
يبلغ وجود الانسان لا اقل من ٥٠٠ ٠٠٠ سنة

٦٧ ــ المراهنة . جرى الحديث اثناء تناول الغداء فى مطعم بيت الراحة عن كيفية حساب احتمال الحوادث . فاخرج عالم رياضى شاب صادف وجوده ضمن من يتناولون الطعام ، اخرج قطعة نقدية وقال :

ــ سأرمى قطعة نقدية على المائدة دون ان انظر . ما هو احتمال ان تقع والصورة الى اعلى ؟

* يعرف القارىء هذا العدد : فهو يمثل المكافأة التى طلبها مخترع لعبة الشطرنج .





شكل ٥٨ . يمكن وضع قطعة النقود على المنضدة بطريقتين

— اشرح اولا ما الذى يعنيه « الاحتمال » ، ان هذا ليس واضحا لدى الجميع .

— اوه ، هذا شيء بسيط جدا ! ان القطعة النقدية تستطيع ان تقع على المنضدة بطريقتين (شكل ٥٨) : هكذا والصورة الى اعلى او هكذا والصورة الى اسفل .

تجوز حالتان فقط من جميع الاحوال الممكنة هنا . منها بالنسبة للحادثة التى تهمنا تكون مناسبة حادثة واحدة فقط . والآن نوجد النسبة :

$$\frac{\text{عدد الحوادث المناسبة}}{\text{عدد الحوادث الممكنة}} = \frac{١}{٢}$$

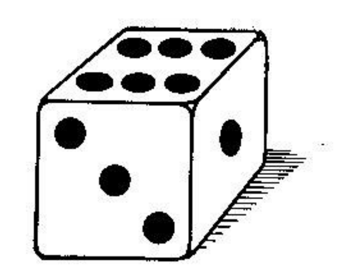
ان الكسر $\frac{١}{٢}$ يمثل « احتمال » وقوع القطعة النقدية والصورة الى اعلى .

وتدخل احدهم :

ـ بالنسبة للقطعة النقدية هذا بسيط ولكن ابحث حالة اعقد ، مثلا حالة زهر اللعب .

وافق العالم الرياضى قائلا :

ـ دعنا نبحث ، ذلك ، ان زهر اللعب هو مكعب توجد



شكل ٥٩ . زهر اللعب

اعداد على جوانبه (شكل ٥٩) . ما هو احتمال ان يقع المكعب بعد رميه برقم معين الى اعلى ، فلنقل ان يظهر الرقم ستة ؟ ما هى كل الحالات الممكنة هنا ؟ ممكن ان يقع المكعب على اى جانب من جوانبه الستة ، وهذا يعنى ان هناك ٦ حالات فقط . وتناسبنا منها واحدة فقط هى عندما تكون الستة الى اعلى . وهكذا نحصل على الاحتمال بقسمة ١ على ٦ . باختصار ، يعبر عن الاحتمال بالكسر $\frac{١}{٦}$.

وسألت احدى السيدات :

ـ ايمكن حساب الاحتمال فى كل الحالات ؟ خذ مثلا هذا المثال . لقد حزرت ان اول مار نراه من نافذة المطعم سيكون رجلا . ما هو احتمال ان يكون ما حزرته صحيحا ؟

ـ من الواضح ان الاحتمال سيكون مساويا النصف لو اننا

اتفقنا على ان الطفل الذى عمره سنة واحدة ، يمكن ان يعتبر رجلا . وعدد الرجال على الارض يساوى عدد النساء .

وسأل احد الموجودين :

— وما هو احتمال ان يكون اول اثنين من المارة رجلين ؟

— هذا الحساب اصعب بعض الشيء . سنعد ما هى الحالات الممكنة فى هذا المجال . اولا ، يمكن ، ان يكون الشخصان — رجلين . ثانيا ، انه سيظهر اولا رجل ومن ثم امرأة . ثالثا ، بالعكس : انه ستظهر اولا امرأة ومن ثم رجل . واخيرا الحالة الرابعة : ان يكون الاثنان — امرأتين . وهكذا يبلغ عدد الاحوال الممكنة — اربع . منها حالة واحدة مناسبة فقط ، وهذا واضح وهى الحالة الاولى . نحصل للاحتمال على الكسر $\frac{١}{٤}$. وبذلك تكون مسألتك قد حلت .

— مفهوم . ولكن يمكن ان نضع السؤال ليشمل ثلاثة رجال : فما هو احتمال ان يكون اول ثلاثة مارة كلهم رجالا ؟

— فلنحسب هذا ايضا . سنبدأ مرة ثانية من حساب الحالات الممكنة . يكون عدد كل الحالات بالنسبة لاثنين من المارة يساوى ، كما نعلم ، اربع . وباضافة الشخص الثالث يرتفع عدد الحالات الممكنة الى الضعف لانه يمكن ان يضم الى كل من المجموعات الاربع المذكورة لاثنين من المارة رجل او امرأة . ومجموع كل الحالات الممكنة هنا يساوى ٤ × ٢ = ٨ . اما الاحتمال الذى نبحث عنه فمن الواضح انه يساوى $\frac{١}{٨}$ ، لان الحالة المناسبة هى الحالة

الاولى فقط . ومن السهل هنا ان نذكر قاعدة الحساب وهى : فى حالة اثنين من المارة كان لدينا الاحتمال $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ، وفى حالة ثلاثة من المارة $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ، وفى حالة اربعة يساوى الاحتمال حاصل ضرب اربعة انصاف .. الخ . وكما ترون فان الاحتمال يقل .

ــ وماذا يساوى الاحتمال ، على سبيل المثال عندما يكون عدد المارة عشرة ؟

ــ اى ما هو الاحتمال بان المارين العشرة الاوائل سيكونون جميعا رجالا ؟ لنحسب كم يساوى حاصل ضرب عشرة انصاف . انه $\frac{1}{1024}$ اى اقل من واحد من الالف . وهذا يعنى انه اذا راهنا بالنقود على ذلك ، بان تقولوا ان هذا سيحدث ، وتضعون روبلا واحدا ، فاننى استطيع ان اراهن بـ ١٠٠٠ روبل قائلا ان ذلك لن يحدث .

وقال احدهم :

ــ رهان مربح ! اننى كنت اضع الروبل برضى كى احظى بامكانية كسب الف روبل كاملة .

ــ ولكن توجد الف فرصة مقابل فرصتك الواحدة ــ يجب ان تأخذ هذا فى الاعتبار ايضا .

ــ ان هذا لا يعنى شيئا . لقد كنت اغامر بالروبل مقابل الالف حتى على ان مائة من المارة سيكونون كلهم رجالا .

وسأل العالم الرياضى :

— وهل تتصور كم هو صغير احتمال حدوث ذلك ؟

— واحد من مليون او شيء من هذا القبيل ؟

— اصغر بكثير . ان جزءا من المليون يؤلف الاحتمال بالنسبة لـ ٢٠ من المارة . اما بالنسبة لمائة من المارة فسيكون الاحتمال ... دعنى احسب ذلك على الورقة . انه جزء من بليون .. وجزء من ترليون .. وجزء من كوادرليون ... اها ! انه واحد صحيح مع ثلاثين صفرا .

— فقط ؟

— وهل ان ٣٠ صفرا قليلة بالنسبة اليك ؟ فلا يوجد فى المحيط جزء من الف من هذا العدد من القطرات الصغيرة جدا .

— انه عدد ضخم ، حقا ! كم ستضع مقابل روبلى ؟

— ها .. ها ! ... كل ما معى ! كل ما معى من نقود .

— كلها — ان هذا كثير جدا . ضف على الرهان دراجتك . والحق انك لن تضعها ؟

— ولم لا ؟ تفضل ! فلتكن الدراجة اذا اردت . انا لا اغامر بشيء ابدا .

— وانا لا اغامر ايضا . فان الروبل ليس شيئا كبيرا ، ولكن فى مقابل ذلك استطيع ان اكسب دراجة ، اما انت فلا تكسب شيئا تقريبا .

ـ ولكن لابد ان تفهم انك ستخسر حتما ! ولن تكسب الدراجة ابدا ، اما روبلك فيمكن القول انه فى جيبى .

لكن صديق العالم الرياضى اوقفه قائلا :

ـ ماذا تفعل ! من اجل روبل تغامر بدراجة ، هذا جنون !

فاجابه الرياضى :

ـ على العكس ، ان الجنون ان تضيع ولو حتى روبلا واحدا فى مثل هذه الاحوال . فالخسارة محتمة ! الاحسن ان ترمى الروبل .

ـ ولكن هناك فرصة واحدة ؟

قطرة واحدة فى محيط كامل . فى عشرة محيطات ! هذه هى فرصتك . واما بالنسبة لى فعشرة محيطات ضد قطرة واحدة . ان مكسبى محقق مثل كون الاربعة ضعف الاثنين .

قال صوت هادىء لعجوز كان يسمع النقاش صامتا طول الوقت :

ـ تحمس ايها الشاب ... تحمس ...

ـ كيف ؟ وانت ايضا يا استاذ تناقش بافكار ضيقة الافق ؟

ـ هل فكرت ان ليس كل الحالات هنا يمكن ان تحدث بنفس الاحتمال ؟ ان حساب الاحتمال صحيح لاى الاحداث فقط ؟ للاحداث ذات الاحتمال المتساوى الحدوث . أليس كذلك ؟ ولكن فى المثال قيد البحث ... على كل حال ـ قال العجوز وهو يصغى الى الحديث ـ ان الواقع وحده ، على ما يبدو ،

هو الذى سيبين لك الآن خطأك . الا تسمع صوت الموسيقى العسكرية ، صحيح ام لا ؟

وبادر العالم الرياضى فى الحديث قائلا :

– وما علاقة الموسيقى بذلك ؟

ثم صمت . وبان على وجهه الذعر . وهب من مكانه ونظر من النافذة مخرجا رأسه .

وجاء صوته الكئيب يقول :

– هو كذلك ! لقد خسرت الرهان !

وداعا ايتها الدراجة ...

بعد دقيقة اصبح واضحا للجميع فيم القضية . لقد كانت تسير امام النافذة كتيبة جنود .

٦٨ – الاعداد العملاقة حولنا وداخلنا . ليس هناك حاجة للبحث عن اوضاع خارقة للعادة لكى نقابل الاعداد العملاقة . فهى تتواجد فى كل مكان حولنا ، وحتى فى داخلنا ، ويلزم فقط ان نحسن مشاهدتها . السماء فوق رؤوسنا ، والرمل تحت اقدامنا ، والهواء من حولنا ، والدم فى اجسامنا ... كل هذا يخفى فى نفسه عمالقة غير منظورة من عالم الاعداد .

ولا تعتبر العمالق العددية فى الفضاء السماوى بالنسبة لاغلب الناس شيئا مفاجئا . فمعروف جيدا ، ان الحديث سيكون عن عدد نجوم الكون وعن المسافات التى تبعد بها عنا وبين بعضها

البعض وعن مقاييسها ، ووزنها ، وعمرها ، ... ففى كل الاحوال نقابل اعدادا تفوق المخيلة بضخامتها . ليس عبثا ان اصبحت عبارة « العدد الفلكى » ذائعة الصيت . وعلى الرغم من ذلك ، فان الكثيرين لا يعرفون ان حتى الاجسام السماوية التى غالبا ما يسميها الفلكيون « صغيرة » ، تكون عمالقة حقيقة ، لو استخدمنا تجاهها المقياس الارضى المعروف . وتوجد فى مجموعتنا الشمسية كواكب سماها الفلكيون « بالصغرى » نظرا لصغر حجمها . منها ما يبلغ طول قطرها بضعة كيلومترات . وتكون بالنسبة للفلكى المعتاد على المقاييس العملاقة ، من الضآلة بحيث انه عندما يتكلم عنها ، يصفها بلا مبالاة « بالضئيلة » . ولكنها تعتبر اجسام « ضئيلة » فقط بجانب الكواكب السماوية الاخرى التى تكون اضخم ، اما بالنسبة للمقياس العادى الانسانى فهى ليست صغيرة . فلنأخذ كوكبا ضئيلا يبلغ قطره ٣ كم . وتبعا لقواعد الهندسة من السهل حساب ان سطح مثل هذه الجسم يكون ٢٨ كم^{٢} او ٢٨٠٠٠٠٠٠ م^{٢} . ويمكن ان يتخذ مكانه وقوفا ٧ اشخاص على ١ م^{٢} . وبذلك ترون انه يوجد على ٢٨ مليون م^{٢} مكان لـ ١٩٦ مليون انسان .

كما ان الرمل الذى ندوسه كذلك يدخلنا الى عالم العمالقة العددية . وليس عبثا ان ظهرت منذ القدم عبارة « لا يحصى كالرمل » وعلى اى حال فان القدماء قد قللوا من مقدار عدد الرمل قائلين انه يساوى كثرة النجوم . فى قديم الزمان لم تكن هناك تليسكوبات

كان يمكن للمرء ان يشاهد بالعين المجردة فى السماء ما يقرب من ٣٥٠٠ نجمة (فى نصف الكرة الارضية الواحد) . ويزيد عدد الرمل على شاطئ البحر بملايين المرات على عدد النجوم الممكن رؤيتها بالعين المجردة .

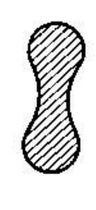
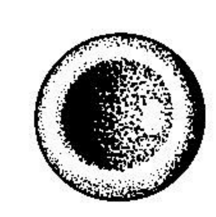
ان العملاق العددى العظيم يكمن فى الهواء الذى نتنفسه . فكل سنتيمتر مكعب من الهواء ، او كل قمع يحتوى على ٢٧ كوينتيليونا (اى العدد ٢٧ مع ١٨ صفر) من الجزيئات الصغيرة التى تسمى « بالجزيئات » .

ومن المستحيل تصور مدى ضخامة هذا العدد . ولو كان فى الكون مثل هذا العدد من الناس لما كفت الاماكن على كوكبنا . وفى الحقيقة فان سطح الكرة الارضية بحساب كل القارات والمحيطات يساوى ٥٠٠ مليون كيلومتر مربع . وبتقسيمها الى امتار مربعة نحصل على

٥٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ م٢

لنقسم ٢٧ كوينتيليونا على هذا العدد فنحصل على ٥٤ ٠٠٠ . وهذا يعنى انه كان سيكون على متر مربع من سطح الارض اكثر من ٥٠ الف انسان !

لقد ذكرنا سابقا ان العمالقة العددية تختبئ داخل الجسم البشرى ايضا . سنبين ذلك بأخذ دمنا كمثال . لو اننا نظرنا الى نقطة الدم تحت الميكروسكوب ، لوجدنا انه تسبح فيها مجموعة ضخمة

شكل ٦٠

من اجسام صغيرة جدا ذات لون احمر هى التى تعطى الدم لونه . كل واحدة من هذه « الاجسام الدموية الحمراء » لها شكل وسادة صغيرة مستديرة مقعرة فى الوسط (شكل ٦٠) . وكلها عند الانسان تقريبا ذات مقاييس واحدة ويكون مقطعها تقريبا ٠,٠٠٧ مم وسمكها ٠,٠٠٢ مم . ولكن عددها ضخم . ففى قطرة الدم الصغيرة التى يبلغ حجمها ١ مم^{٣} يكون عددها ٥ مليون . فكم عددها فى جسمنا ؟ يوجد فى جسم الانسان من لترات الدم اقل بحوالى ١٤ مرة من عدد كيلوجرامات وزنه . ولو كان وزنك ٤٠ كجم فان الدم فى جسمك حوالى ٣ لترات او ٣ ٠٠٠ ٠٠٠ مم^{٣} . وبما ان كل ملليمتر مكعب يحتوى على ٥ ملايين جسم احمر ، فان العدد الكلى لها فى دمك يكون

$$٥ ٠٠٠ ٠٠٠ \times ٣ ٠٠٠ ٠٠٠ = ١٥ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠$$

اى ١٥ تريليون جسم دموى . اذن ما هى المسافة التى يشغلها هذا الجيش من الدوائر لو وضعتها فى صف واحدة وراء الاخرى ؟ ليس من الصعب حساب ، ان طول هذا الصف سيكون ١٠٥ ٠٠٠ كم . وكان خيط الاجسام الحمراء الموجودة فى دمك يمتد لاكثر

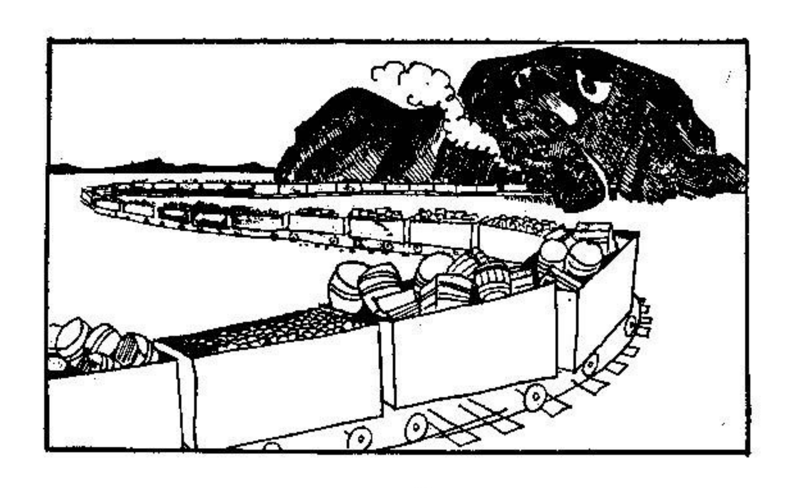
من مائة الف كيلومتر . وكان يمكن بواسطتها ان نلف بهذا الخيط الكرة الارضية عند خط الاستواء بمقدار

١٠٠ ٠٠٠ ÷ ٤٠ ٠٠٠ = ٢,٥ مرة

اما خيط الكرات الدموية للانسان البالغ فيلفها بمقدار ثلاث مرات .

فلنبين ما هى قيمة مثل هذه التجزئة للاجسام الدموية بالنسبة لجسمنا . ان عمل هذه الاجسام هو نشر الاوكسجين فى كل الجسم . فهى تأخذ الاوكسجين عندما يمر الدم خلال الرئتين وتخرجه عندما يدخل مجرى الدم الى انسجة جسمنا ، الى الاماكن البعيدة عن الرئتين . ان التجزؤ الشديد لهذه الاجسام يساعد على قيامها بوظائفها لانه كلما كانت ادق ، وعددها كبيرا ، كلما كان سطحها اكبر . وتستطيع الاجسام الدموية ان تمتص وتخرج الاوكسجين عن طريق سطحها فقط . ويبين الحساب ان السطح الكلى للاجسام الدموية يفوق فى كثير من المرات سطح الجسم البشرى ويساوى ١٢٠٠ م٢ . وتساوى هذه المساحة مساحة حديقة طولها ٤٠ م وعرضها ٣٠ م . والآن انت تفهم كم هو هام لحياة الجسم ان تكون الاجسام الدموية مجزأة وبهذه الكثرة : فهى تستطيع ان تمتص وتخرج الاوكسجين الى السطح الذى هو اكبر بالف مرة من سطح جسمنا .

وينبغى ان نسمى عملاقا عدديا بحق ذلك العدد المهيب الذى تحصل عليه لو انك حسبت كمية الطعام التى يتناولها الانسان



شكل ٦١ . كم يأكل الانسان خلال حياته

خلال ٧٠ سنة من متوسط العمر . ولاحتجنا الى قطار سكة حديد كامل لنقل تلك الاطنان من الماء والخبز ولحم البقر والطيور والاسماك والبطاطس والخضراوات الاخرى ، وآلاف البيضات ، وآلاف اللترات من اللبن .. الخ التى يتناولها الانسان خلال عمره . ويعطى الشكل ٦١ صورة واضحة عن هذا المجموع الكبير غير المتوقع الذى هو اكبر باكثر من الف مرة من وزن جسم الانسان . عندما تراه فانك لا تصدق ان الانسان يمكن ان يقارع هذا العملاق ، بمعنى ان يبتلع بكل معنى الكلمة ، صحيح انه ليس فى مرة واحدة ـــ حمولة قطار بضائع طويل .

الباب الثامن

بدون مسطرة قياس

٦٩ ـ قياس الطريق بالخطوات . لا تتوفر مسطرة القياس او شريط القياس دائما ، فى متناول اليد . ومن المفيد ان نستطيع العمل بدونهما باى طريقة باجراء حتى ولو القياس التقريبى .

ومن الاسهل قياس المسافات القصيرة او الطويلة ، خلال الرحلات مثلا ، بواسطة الخطوات . من اجل ذلك يلزم معرفة طول خطوتك وان تعرف كيف تعد الخطوات . وهى ليست دائما متساوية بالطبع ، نستطيع ان نعمل خطوات قصيرة او عند الرغبة فيمكن ان نخطو خطوات واسعة . ولكن نحن نقوم بخطوات متساوية الطول تقريبا عند السير العادى واذا ما عرفنا طولها المتوسط . عندئذ يمكن قياس المسافات بالخطوات بدون خطأ كبير .

ولكى نعرف طول خطوتنا المتوسطة يلزم قياس طول خطوات كثيرة ومن هنا نحسب طول الخطوة الواحدة . عندئذ ، لاشك انه لا يمكن التصرف بدون شريط او سلك القياس .

مد الشريط على مكان مسطح وقس مسافة طولها ٢٠ م . ارسم هذا المستقيم على الارض وارفع الشريط . والآن سر على هذا الخط بخطوة اعتيادية وعد عدد الخطوات التى قمت بها . من الممكن ان لا نحصل على عدد من الخطوات الكاملة على المسافة المقاسة . عندئذ ، اذا كان الباقى اقصر من طول نصف خطوة فيمكن حذفه ببساطة ، اما اذا كان اطول من نصف الخطوة فان الباقى يحسب كخطوة كاملة . بقسمة الطول الكلى ٢٠ م على عدد الخطوات نحصل على طول الخطوة الواحدة . يجب تذكر هذا العدد لكى تستخدمه عندما يلزم القياس بالخطوات .

ولكى لا نخطأ عند عد الخطوات فيمكن — وخاصة على المسافات الطويلة — ان نقوم بالحساب بالطريقة الآتية : يحسب عدد الخطوات حتى ١٠ فقط ، وبالعد الى هذا العدد يثنى اصبع من اصابع اليد اليسرى . وعند ما تثنى جميع اصابع اليد اليسرى ، اى بمرور ٥٠ خطوة ، يثنى اصبع من اصابع اليد اليمنى . ويمكن القيام بهذه الطريقة العد الى ٢٥٠ ، ثم تبدأ من جديد مع تذكر كم مرة ثنيت كل اصابع اليد اليمنى . وعلى سبيل المثال ، اذا ثنيت جميع اصابع اليد اليمنى مرتين بالمرور على مسافة معينة وفى نهاية الطريق كان قد ثنيت على اليد اليمنى ثلاثة اصابع وعلى اليد اليسرى اربع اصابع ، فان عدد الخطوات التى قمت بها يبلغ :

$$٦٩٠ = ١٠ \times ٤ + ٥٠ \times ٣ + ٢٥٠ \times ٢$$

يجب ان تضاف هنا عدة خطوات اخرى ، وهى التى قمت بها بعد ثنى الاصبع الرابع من اليد اليسرى .

ولنذكر بالمناسبة القاعدة القديمة التالية : ان طول الخطوة المتوسطة للانسان البالغ يساوى نصف المسافة ما بين عينيه واخمصى قدميه .

وهناك قاعدة عملية قديمة تنسب الى سرعة السير : يسير الانسان فى الساعة عددا من الكيلومترات مساويا لعدد الخطوات التى يخطوها فى ٣ ثوان . ومن السهل تبين ان هذه القاعدة صحيحة فقط لطول معين للخطوة ، زد على ذلك ايضا انها صحيحة للخطوة الكبيرة جدا . وفعلا : افرض ان طول الخطوة س من الامتار ، وان عدد الخطوات فى ٣ ثوان يساوى ن . عندئذ يسير الرجل فى ٣ ثوان ن س مترا ، وفى الساعة (٣٦٠٠ ثانية) ١٢٠٠ ن س مترا او ١,٢ ن س كيلومترا . ولكى يساوى هذا الطريق عدد الخطوات التى تتم فى ٣ ثوان ، يلزم ان تتحقق المتساوية ١,٢ ن س = ن او ١,٢ س = ١ ، من هنا تكون

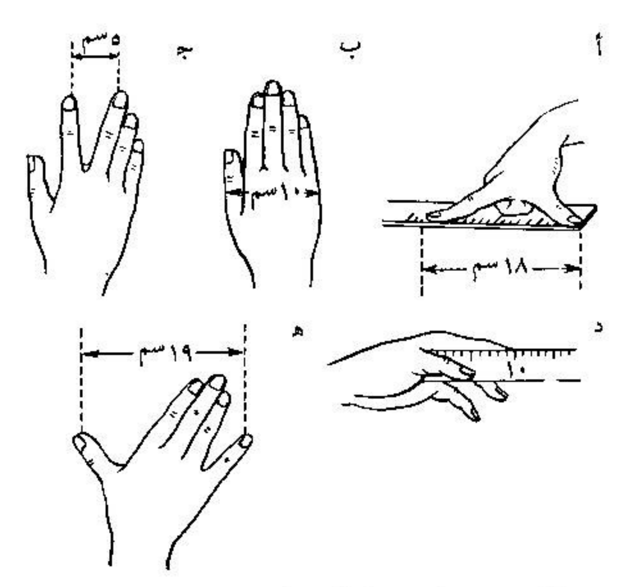
س = ٠,٨٣ متر

لو ان القاعدة السابقة عن علاقة طول الخطوة بطول الانسان صحيحة ، فان القاعدة الثانية ، التى نظرناها الآن تكون صحيحة فقط لاولئك الناس الذين يكون متوسط طولهم — حوالى ١٧٥ سم .

٧٠ ـ المقياس الحى . لقياس الاشياء ذات الحجم المتوسط مع عدم وجود مسطرة قياس او شريط قياس يمكن ان تفعل الآتى : يلزم مد حبل او لوحة من الخشب من طرف اليد الممدودة وحتى الكتف المقابل ـ ويبلغ هذا الطول عند الانسان البالغ حوالى المتر . والطريقة الاخرى للحصول على طول المتر التقريبى هى ان نضع على مستقيم ٦ « ارباع » اى ٦ مسافات ما بين نهايتى الاصبع الاكبر والسبابة بمدهما باعرض ما يمكن (شكل ٦٢ ، أ) .

والارشاد الاخير يدخلنا الى فن القياس « بالايدى المجردة » : ويتطلب ذلك فقط قياس كف يدك مقدما وان تتذكر نتائج القياسات جيدا .

ما الذى يجب قياسه بكف يدك ؟ قبل اى شىء يلزم قياس عرض الكف كما هو مبين على الشكل ٦٢ ، ب . وهو يساوى عند الانسان البالغ ١٠ سم تقريبا ، وقد يكون عندك اقل ولابد ان تعرف اقل بكم . ثم يلزم قياس المسافة ما بين نهايتى الاصبعين الاوسط والسبابة عند وضعهما باوسع قدر ممكن (شكل ٦٢ ، جـ) . ثم من المفيد معرفة طول السبابة بحسابها من قاعدة الاصبع الاكبر كما هو مبين على الشكل ٦٢ ، د . وفى النهاية ، قس المسافة ما بين نهايتى الاصبع الاكبر والخنصر عند وضعهما ابعد ما يمكن عن بعضهما كما هو على الشكل ٦٢ ، هـ .



شكل ٦٢ . ما الذى يجب قياسه بيدك كى يمكن بعد ذلك عدم استخدام شريط القياس

باستخدام هذه « المقاييس الحية » تستطيع ان تقوم بالقياس التقريبى للاشياء الصغيرة .

٧١ – القياس بواسطة القطع النقدية . تستطيع القطع النقدية النحاسية (البرونزية) ان تقوم بواجب نافع . ولا يعرف الكثيرون ان قطر القطعة النقدية من فئة الكوبيك تساوى بدقة ١$\frac{١}{٢}$ سم ، وقطر القطعة من فئة الخمسة كوبيكات ٢$\frac{١}{٢}$ سم بحيث انه بوضع القطعتين بجانب بعضهما نحصل على ٤ سم (شكل ٦٣) . هذا



شكل ٦٣ . قطعة نقدية من فئة الخمسة كوبيكات وقطعة نقدية من فئة الكوبيك الواحد موضوعتان بجانب بعضهما تكونان ٤ سم

يعنى انه لو كان لديك عدة قطع نحاسية ، فستستطيع بدقة كافية ان تحدد الاطوال الآتية :

الكوبيك . . . . ١ $\frac{١}{٢}$ سم
الخمسة كوبيكات . . . . ٢ $\frac{١}{٢}$ سم
قطعتان من فئة الكوبيك . . . . ٣ سم
خمسة كوبيكات وكوبيك واحد . . . . . ٤ سم
قطعتان من فئة الخمسة كوبيكات . . . . ٥ سم
.. الخ

وبطرح عرض القطعة النحاسية من فئة الكوبيك الواحد من عرض القطعة من فئة الخمسة كوبيكات نحصل على ١ سم بالضبط .

اذا لم يوجد لديك لا خمسة كوبيكات ولا كوبيك واحد ، وكانت معك قطعة نحاسية من فئة الكوبيكين او الثلاثة كوبيكات ، فانهما يمكن الى درجة معلومة ان يساعداك ، اذا ما تذكرت جيدا ، ان طول قطرى القطعتين عند وضعهما بجانب بعضهما يساوى ٤ سم (شكل ٦٤) . بثنى الشريط الورقى الذى يبلغ طوله ٤ سنتيمترات بالنصف ثم بثنيه مرة اخرى بالنصف ، نحصل على مقياس من ٤ سم* .

وانت ترى انه عندما يتوفر لدى الانسان الاستعداد والفطنة فانه يستطيع ، حتى بدون مسطرة القياس ، ان يقوم بقياسات تفيد فى الحياة العملية .

ومن المفيد بهذا الصدد ان نضيف الى ذلك ايضا ان قطعنا النقدية النحاسية (البرونزية) يمكن ان تخدم عند الضرورة لا كمقياس فقط ولكن تفيد ايضا عند الحاجة كثقل موازن لقياس الاحمال . ان القطع النقدية النحاسية الجديدة غير الممسوحة

---

* ان قطر القطعة النقدية من فئة الـ ١٥ كوبيكا يساوى ٢ سم تقريبا ، وتقريبا فقط لان القطر الحقيقى لهذه القطعة النقدية ١٩,٥٦ مم . اما ابعاد القطع النقدية النحاسية المذكورة اعلاه الحديثة الصك ، فهى صحيحة بدقة . ومن يكون لديه فرجار مشبه يمكن ان يتأكد من ذلك .



شكل ٦٤ . قطعة نقدية من فئة الثلاث كوبيكات وقطعة نقدية من فئة الكوبيكين موضوعتان بجانب بعضهما تكونان ٤ سم

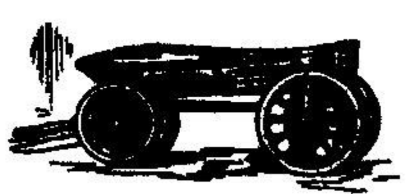
الحديثة الصك تزن من الجرامات بقدر ما هو مكتوب عليها من الكوبيكات : فالقطعة النقدية من فئة الكوبيك الواحد — تزن جرام واحد ومن فئة الكوبيكين — جرامين .. الخ . اما وزن القطع النقدية المستعملة فتقل عن تلك المعايير قليلا . وبما انه فى الحياة اليومية غالبا لا تكون تحت يدنا مجموعة اوزان صغيرة من ١ — ١٠ جم فان معرفة العلاقات المبينة اعلاه يمكن ان تفيد جدا .

الباب التاسع

الغـــــاز هندسيـــــة

لا يتطلب حل الالغاز الواردة فى هذا الباب معرفة مقرر الهندسة باكمله . ويستطيع ان يحلها من له المام بمجموعة متواضعة من المعلومات الهندسية الاولية فقط . ان المسائل المطروحة هنا ستساعد القارئ على ان يتأكد هل هو حقا يعرف تلك المعلومات الهندسية التى يعتقد انه قد استوعبها . ولا تكون المعرفة الحقيقية للهندسة فى مهارة سرد خصائص الاشكال فقط وانما فى فن استخدامها ايضا عمليا لحل المهام الواقعية . فما فائدة البندقية لانسان لا يعرف اطلاق النار ؟

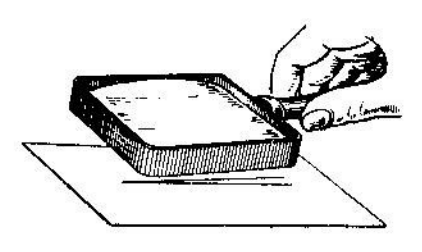
فلندع القارئ يراجع كم اصابة دقيقة يستطيع ان يصيبها من ٢٤ طلقة على اهداف هندسية .

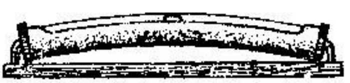


شكل ٦٥ . لماذا يتآكل المحور الامامى اكثر من الخلفى ؟

٧٢ – عربة النقل .

لماذا يتآكل المحور


شكل ٦٦ . ما مقدار الزاوية ؟


شكل ٦٧ . المقياس النجارى

الامامى لعربة النقل اكثر ويحترق اكثر من المحور الخلفى ؟

٧٣ ــ في عدسة التكبير . ينظر من خلال عدسة تكبير تكبر بمقدار ٤ مرات الى زاوية مقدارها $1\frac{1}{2}°$. باى مقدار ستظهر الزاوية (شكل ٦٦) ؟

٧٤ ــ المستوى النجارى « المقياس المائى » : تعرفون بالطبع المستوى النجارى ذى الفقاعة الغازية (شكل ٦٧) التى تبتعد جانبا عن العلامة عندما تميل قاعدة المستوى . وكلما كان هذا الميل اكبر ، كلما تحركت الفقاعة اكثر بعيدا عن العلامة التى فى المنتصف . وسبب تحرك الفقاعة هو لكونها اخف من السائل الذى توجد فيه فتطفو الى اعلى . ولكن اذا كانت الانبوبة مستقيمة فان الفقاعة تبتعد بسرعة الى نهاية الانبوبة عند اقل ميل ، اى الى اعلى جزء منها . ومن السهل تفهم ان مثل هذا المقياس لا يكون مناسبا

عمليا . ولذلك تصنع انبوبة المقياس مقوسة كما هو مبين على الشكل ٦٧ . وعند الوضع الافقى لقاعدة مثل هذا المقياس تأخذ الفقاعة اعلى نقطة فى الانبوبة والتى توجد عند منتصفها ، واذا مال المستوى فان اعلى نقطة فى الانبوبة تصبح احدى النقط المجاورة وليس نقطة الوسط وتتحرك الفقاعة عن العلامة الى مكان آخر فى الانبوبة .

والمطلوب هنا هو ان تحدد كم من المليمترات ستبتعد الفقاعة جانبا عن العلامة اذا كان المقياس قد اميل بمقدار نصف درجة ، مع العلم ان نصف قطر قوس انحناء الانبوبة يساوى مترا واحدا .

٧٥ ــ عدد السطوح . قد يبدو هذا السؤال للكثيرين ساذجا جدا او على العكس يبدو مفرطا فى الذكاء :

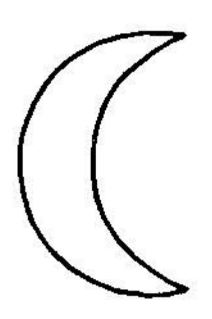
كم عدد سطوح القلم ذى الستة سطوح ؟

قبل ان تنظر الى الحل ، فكر مليا فى المسألة .

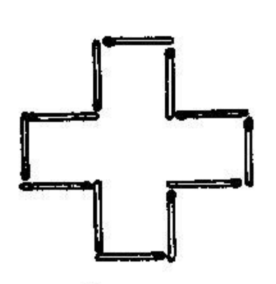
٧٦ ــ الهلال . المطلوب تقسيم شكل الهلال (شكل ٦٨) الى ٦ اجزاء بمد خطين مستقيمين فقط .

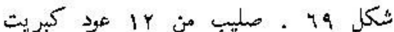
كيف نفعل ذلك ؟

٧٧ ــ من ١٢ عود كبريت . يمكن من ١٢ عود كبريت تكوين شكل الصليب (شكل ٦٩) ، بحيث تساوى مساحته خمسة مربعات « من اعواد الكبريت » .



شكل ٦٨ . الهلال



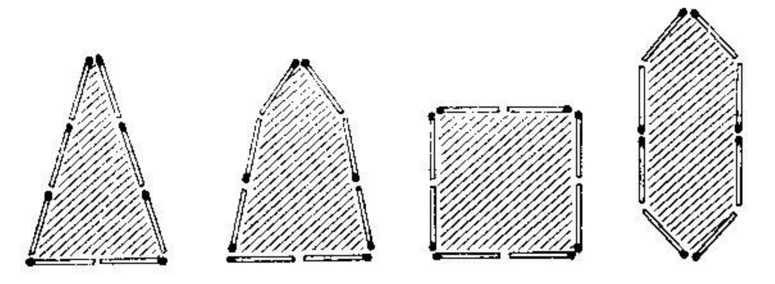


شكل ٦٩ . صليب من ١٢ عود كبريت

غير وضع اعواد الكبريت بحيث يشمل محيط الشكل مساحة تساوى ٤ مربعات «من اعواد الكبريت» فقط .

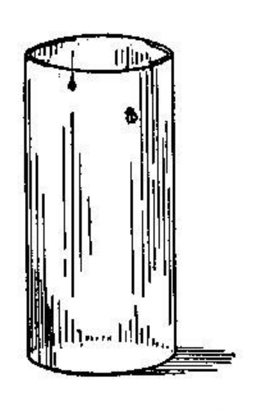
لا يجوز استعمال اجهزة القياس عند حل المسألة .

٧٨ – من ٨ اعواد كبريت . يمكن تكوين اشكال مقفلة مختلفة من ٨ اعواد كبريت بعضها مبين على الشكل ٧٠ . وبالطبع



شكل ٧٠ . كيف يمكن من ٨ اعواد كبريت صنع شكل ذى اكبر مساحة ممكنة؟

فان مساحاتها مختلفة . والمطلوب تكوين شكل من ٨ اعواد كبريت يحيط باكبر سطح .



شكل ٧١ . بين للذبابة الطريق الى قطرة العسل

٧٩ – طريق الذبابة . تظهر على السطح الداخلى لوعاء زجاجى اسطوانى قطرة عسل تبعد بمسافة ثلاثة سنتيمترات عن الحافة العليا للاناء . ووقفت ذبابة فى نقطة على السطح الخارجى فى الطرف المقابل (شكل ٧١) .

بين للذبابة اقصر طريق للوصول الى قطرة العسل .

علما بان ارتفاع الوعاء ٢٠ سم وقطره ١٠ سم .

لا تفترض ان الذبابة نفسها ستجد اقصر طريق وبهذا تسهل عليك حل المسألة : فان ذلك يتطلب ان تمتلك معارف هندسية شاملة لا تتحملها رأس الذبابة .

٨٠ – ايجاد السدادة . امامك قطعة من الخشب (شكل ٧٢) ذات ثلاث فتحات : مربعة ، ومثلثة ، ودائرية . هل يمكن ان توجد سدادة واحدة لغلق كل هذه الفتحات ؟

٨١ – السدادة الثانية . اذا تمكنت من حل المسألة السابقة ، فقد يجوز ان تستطيع ايجاد السدادة لمثل تلك الفتحات المبينة على الشكل ٧٣ ؟



شكل ٧٢ . اوجد سدادة واحدة لهذه الفتحات الثلاث



شكل ٧٣ . هل توجد سدادة واحدة لهذه الفتحات ؟



شكل ٧٤ . هل يمكن عمل سدادة واحدة لهذه الفتحات الثلاث ؟

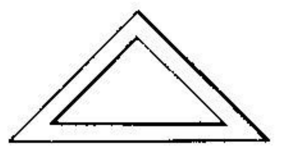
٨٢ ــ السدادة الثالثة . واخيرا اليك مسألة اخرى من نفس النوع : هل توجد سدادة واحدة لكل الفتحات الثلاث المبينة على الشكل ٧٤ ؟

٨٣ ــ امرار القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات . خذ قطعتى نقود حديثة الصك : من فئة ٥ كوبيكات وكوبيكين . ارسم على قطعة ورق دائرة تساوى بدقة محيط القطعة النقدية من فئة الكوبيكين ، واقطع هذه الدائرة بعناية .

كيف تعتقد : هل ستمر القطعة النقدية من فئة خمسة كوبيكات خلال هذه الفتحة ؟

لا مجال للخداع هذا : فالمسألة هندسية حقيقية .

٨٤ ــ ارتفاع البرج . يوجد فى بلدتك ومن معالمها ــ برج مرتفع ، ولكنك لا تعرف ارتفاعه . وتوجد لديك صورة فوتوغرافية للبرج على كارت بريدى . كيف يمكن ان تساعدك هذه الصورة على معرفة ارتفاع البرج ؟



شكل ٧٥ . هل المثلثان الداخلى والخارجى متشابهان ؟



شكل ٧٦ . هل يشابه الشكل الرباعى الخارجى الشكل الرباعى الداخلى ؟

٨٥ ــ الاشكال المتشابهة . هذه المسألة مخصصة لمن يعرف فيم يتركز التشابه الهندسى . مطلوب الاجابة على السؤالين الآتيين :

١) هل يتشابه فى شكل مثلث الرسم الهندسى (شكل ٧٥) المثلثان الخارجى والداخلى ؟

٢) هل يتشابه فى شكل الاطار (شكل ٧٦) المستطيلان الداخلى والخارجى ؟

٨٦ ــ ظل السلك . الى اى بعد يمتد فى الفراغ الظل الكامل لسلك التلغراف الذى يبلغ قطره ٤ مم فى اليوم المشمس ؟

٨٧ ــ قالب الطوب . يزن قالب طوب البناء ٤ كجم . كم يزن قالب الطوب الخاص باللعب المصنوع من نفس المادة ولكن مقاييسه اصغر بـ ٤ مرات ؟

٨٨ ـ العملاق والقزم . بكم مرة تقريبا يكون العملاق الذى طوله ٢ م اثقل من قزم طوله ١ م ؟

٨٩ ـ بطيختان . تباع فى السوق الريفى بطيختان باحجام مختلفة . احداهما اعرض من الثانية بمقدار الربع واغلى منها بمرة ونصف . ايهما شراؤها اربح ؟

٩٠ ـ شمامتان . تباع شمامتان من نوع واحد . محيط الاولى ٦٠ سم ومحيط الثانية ٥٠ سم . الاولى اغلى من الثانية بمرة ونصف . اى شمامة من الاربح شراؤها ؟

٩١ ـ الكرزة . يحيط القسم الناعم من ثمرة الكرزة بالنواة بطبقة سمكها يساوى سمك النواة . بافتراض ان للكرزة وللنواة شكلا كرويا ، هل تستطيع ان تتصور فى ذهنك بكم مرة يكون حجم الجزء الغض من الكرزة اكبر من حجم النواة ؟

٩٢ ـ نموذج برج ايفل . ارتفاع برج ايفل فى باريس ٣٠٠ م وبنى باكمله من الحديد الذى استخدم منه فى البناء حوالى ٨٠٠٠٠٠٠ كجم . اود ان اطلب عمل نموذج للبرج المشهور يبلغ وزنه ١ كجم فقط .

كم سيكون ارتفاع النموذج ؟ اعلى من القدح ام اقل ؟

٩٣ ـ وعاءان . يوجد وعاءان من النحاس لهما شكل واحد وسمك جدارهما واحد . الاول يسع اكثر من الثانى بـ ٨ مرات . بكم مرة يكون الوعاء الاول اثقل من الثانى ؟

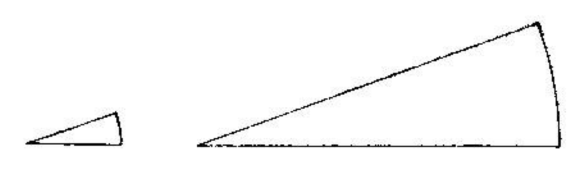
٩٤ – في الصقيع . يقف انسان بالغ وطفل فى الصقيع ، والاثنان فى ملابس واحدة .
لأى منهم يكون الجو ابرد ؟

حل الالغاز ٧٢ – ٩٤

٧٢ – يبدو من اول نظرة ان هذه المسألة لا علاقة لها البتة بعلم الهندسة . ولكن فى هذا بالذات يكمن اتقان معرفة هذا العلم ، بغية القدرة على ان تكتشف الاساس الهندسى للمسألة ، الذى يختفى وراء التفاصيل الجانبية . ومسألتنا فى جوهرها هندسية بدون شك ولا يمكن حلها بدون معرفة الهندسة .

والآن ، لم يتآكل المحور الامامى اكثر من المحور الخلفى ؟ معروف للجميع ان العجلات الامامية اصغر من العجلات الخلفية . وفى نفس المسافة تدور الدائرة الصغرى عددا اكبر من الدورات ويكون محيط الدائرة الصغيرة اصغر ، بذلك فهى تدور عددا اكبر من الدورات على نفس المسافة . ومفهوم الآن انه فى كل الرحلات التى تقوم بها العربة تدور العجلات الامامية عددا من الدورات اكبر من التى تدورها العجلات الخلفية . وبالطبع فان العدد الاكبر من الدورات يجعل المحور الامامى يتآكل اسرع .

٧٣ – لو افترضت ان مقدار الزاوية يبدو من خلال العدسة هو $١\frac{١}{٢} \times ٤ = ٦^\circ$ ، فانك بهذا تكون قد اخطأت . لان مقدار



شكل ٧٧

الزاوية لا يكبر عند النظر اليها من خلال العدسة . صحيح ان طول القوس الذى يصنع الزاوية سيكبر بلا جدال ــ ولكن سيكبر بنفس المقدار نصف قطر هذا القوس بحيث ان مقدار الزاوية المركزية يظل بلا تغيير . وشكل ٧٧ يوضح ما ذكرناه .

٧٤ ــ انظر الى الشكل ٧٨ حيث م ا ن هو الوضع الابتدائى لقوس مقياس المستوى . أن مَ ب نَ هو وضعه الجديد بحيث ان الوتر مَ نَ يكون مع الوتر م ن زاوية مقدارها $\frac{1}{2}$° . ويختار كل من وضعى المقياس بحيث تبقى الفقاعة التى كانت فى نقطة ا فى نفس هذه النقطة ، ولكن انتقل منتصف القوس م ن الى ب . المطلوب حساب طول القوس ا ب اذا كان نصف قطره يساوى ١ م ، اما قيمة القوس بمقياس الزوايا فهى $\frac{1}{2}$° (ينجم هذا من مساواة الزوايا الحادة ذات الجوانب القائمة) .

الحساب بسيط . فطول الدائرة الكاملة التى يبلغ نصف قطرها ١ م (١٠٠٠ مم) يساوى ٢ × ٣,١٤ × ١٠٠٠ = ٦٢٨٠ مم . بما

13—620

انه يوجد فى الدائرة ٣٦٠° او ٧٢٠ من انصاف الدرجات ، فان طول نصف درجة واحدة يتحدد بالقسمة :

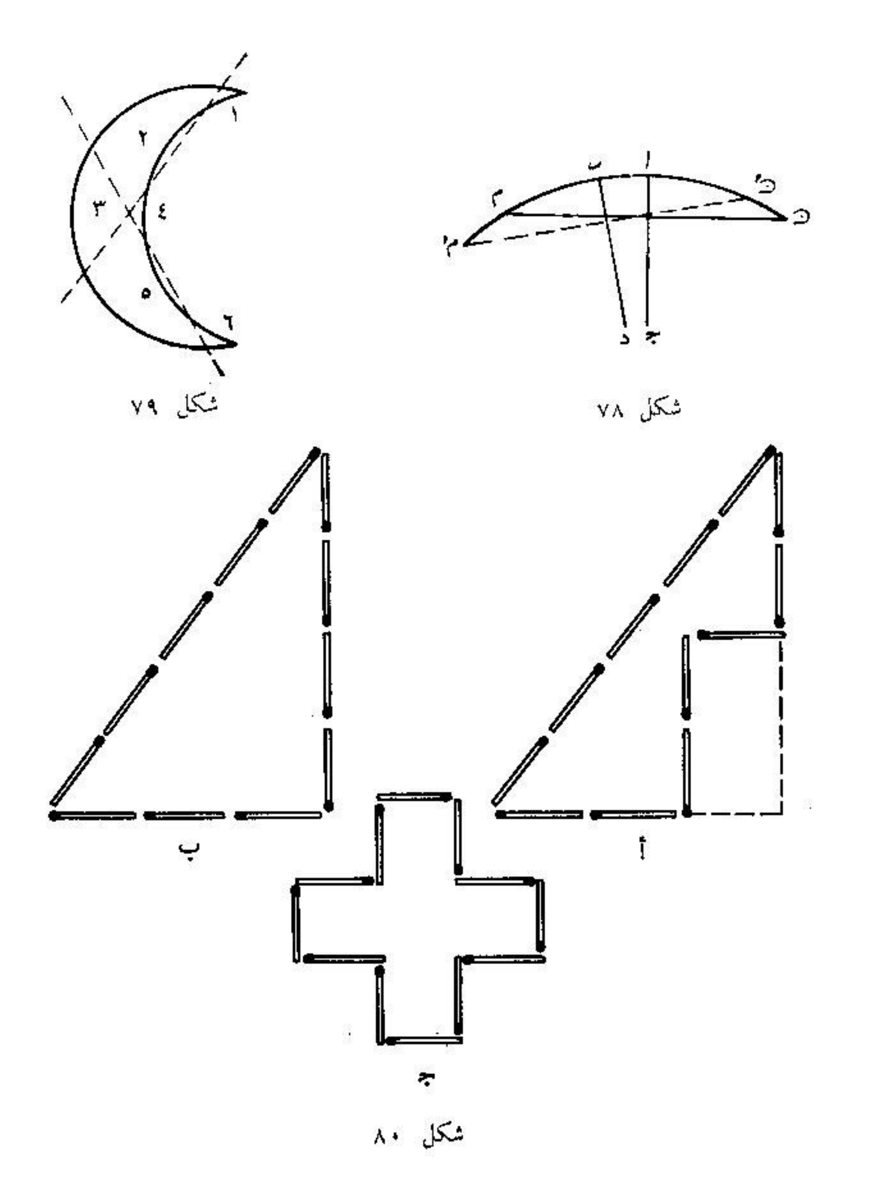
٦٢٨٠ ÷ ٧٢٠ = ٨,٧ مم

وتتحرك الفقاعة جانبا عن العلامة بمقدار يقرب من ٩ مم اى بمقدار ١ سم تقريبا . من السهل رؤية انه كلما كان نصف قطر انحناء الانبوبة اكبر كلما كان المقياس اكثر حساسية .

٧٥ — المسألة ليست فكاهة ابدا ، ولكنها تخفى خطأ استخدام الكلمات . فان القلم السداسى السطوح ليس له ٦ سطوح كما قد يعتقد الكثيرون . ويبلغ مجموع سطوحه ثمانية — حتى عندما يكون غير مبرى — هى ستة سطوح جانبية وبالاضافة الى ذلك سطحان صغيران « لمقطعيه العرضيين » . لو كان هناك حقيقة ٦ سطوح لكان شكله مختلفا تماما — اى بشكل هندسى ذى جوانب مربعة .

عادة ان حساب الاسطح الجانبية للموشور فقط مع نسيان قاعدتيه منتشرة جدا . ويقول الكثيرون هذا موشور ثلاثى السطوح او موشور رباعى السطوح .. الخ . فى الوقت الذى يلزم تسمية هذه المواشير بثلاثية الزاوية ، رباعية الزاوية .. الخ — تبعا لشكل القاعدة . وليس هناك البتة وجود مواشير ثلاثية السطوح .

ولذلك فمن الصواب تسمية القلم المذكور فى المسألة لا بالسداسى السطوح ولكن سداسى الاضلاع .



شكل ٧٩

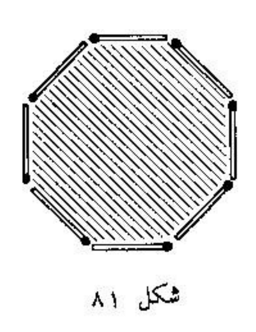
شكل ٧٨

شكل ٨٠

٧٦ – يجب ان نفعل كما هو مبين على الشكل ٧٩ . فنحصل على ٦ اجزاء وقد رقمت للتوضيح .

٧٧ – يجب وضع اعواد الكبريت كما هو مبين على الشكل ٨٠ ، أ . ومساحة هذا الشكل تساوى ربع مساحة المربع « من اعواد الكبريت » . كيف يمكن ان نتأكد من ذلك ؟ فلنكمل الشكل فى الخيال الى شكل المثلث . نحصل على مثلث قائم الزاوية قاعدته ٣ اعواد وارتفاعة ٤ اعواد* . مساحة هذا المثلث تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع : $\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤ = ٦$ مربعات يساوى طول ضلعها عودا واحدا (شكل ٨٠ ، ب) . ولكن من الواضح ان مساحة الشكل اقل من مساحة المثلث بمربعين اثنين « من اعواد الكبريت » وتساوى بالتالى ٤ مربعات مثل هذه المربعات .

٧٨ – يمكن اثبات انه من بين كل الاشكال ذات المحيط المتساوى الطول (او كما يقال ذات المحيط الواحد) يكون للدائرة اكبر سطح . وطبعا لا يمكن ان تكون من اعواد الكبريت دائرة ولكن يمكن صنع شكل من ٨ اعواد كبريت (شكل ٨١) يشبه اكثر من غيره شكل



شكل ٨١

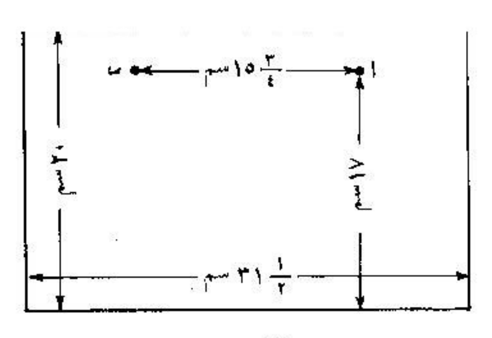
* سيفهم القراء الذين يعرفون ما يسمى بـ « نظرية فيثاغورس » ، لماذا نستطيع القول بثقة ان المثلث المتكون هنا هو مثلث قائم الزاوية $٣^٢ + ٤^٢ = ٥^٢$.

الدائرة : هو ثمانى الاضلاع الصحيح . وثمانى الاضلاع الصحيح هو الشكل الذى يلبى متطلبات مسألتنا : فلهذا الشكل اكبر سطح .

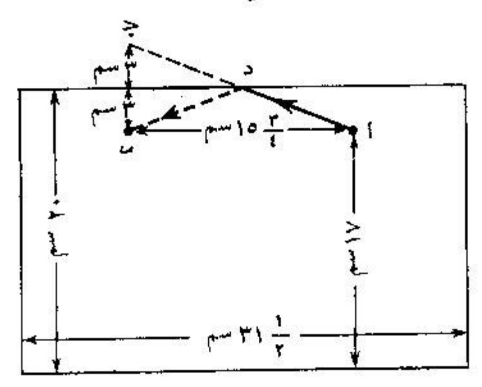
٧٩ – لحل المسألة سنفرد السطح الجانبى للوعاء الاسطوانى الى شكل مسطح فنحصل على مستطيل (شكل ٨٢) ، ارتفاعه ٢٠ سم ، اما قاعدته فتساوى محيط الوعاء اى $١٠ \times ٣\frac{١}{٧} = ٣١\frac{١}{٢}$ سم (الا قليلا) . سنؤشر على هذا المستطيل علامات تدل على مكان الذبابة ومكان قطرة العسل . تكون الذبابة فى النقطة ا على بعد ١٧ سم من القاعدة ، وقطرة العسل فى النقطة ب على نفس الارتفاع ، وعلى بعد نصف محيط الوعاء من ا اى على بعد $١٥\frac{٣}{٤}$ سم .

والآن لايجاد النقطة التى يجب على الذبابة ان تجتاز فيها حافة الوعاء نقوم بالآتى : نمد مستقيما من النقطة ب (شكل ٨٣) يشكل زاوية قائمة مع الحافة العليا للمستطيل ونمده بمسافة متساوية : فنحصل على النقطة جـ . نوصل هذه النقطة بخط مستقيم مع ا . ستكون النقطة د النقطة التى لابد للذبابة ان تجتاز فيها حافة الوعاء الى الناحية الثانية له ، واما الطريق ا د ب فيكون اقصر طريق .

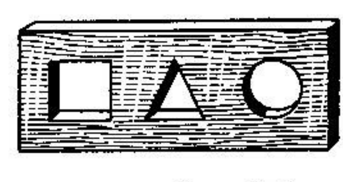
بايجاد اقصر الطرق على المستطيل المتكون ، نلفه مرة ثانية على هيئة اسطوانة فنعرف كيف يجب ان تسير الذبابة لكى تصل باسرع وقت ممكن الى قطرة العسل (شكل ٨٤) .



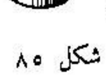
شكل ٨٢



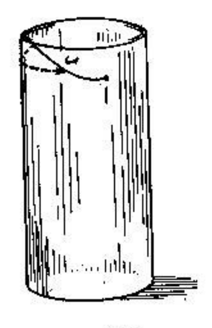
شكل ٨٣



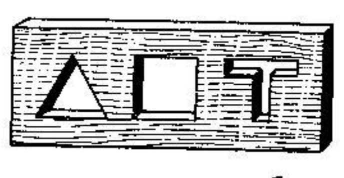




شكل ٨٥



شكل ٨٤





شكل ٨٧





شكل ٨٦

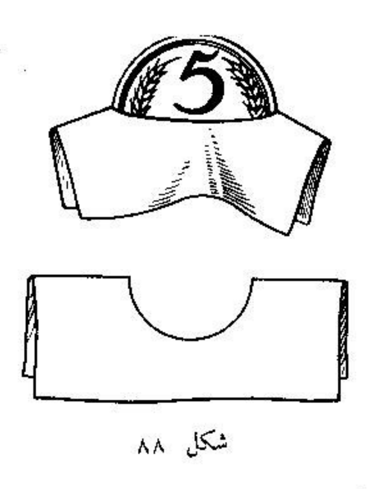
ولا اعرف فيما اذا يختار الذباب فى مثل هذه الاحوال هذ الطريق . ربما ان الذبابة تقوم اعتمادا على حاسة الشم بالسير فى اقصر طريق ولكن هذا الاحتمال ضئيل اذ ان حاسة الشم لدى الذبابة ليست دقيقة بما فيه الكفاية لعمل ذلك .

٨٠ ـ ان السدادة اللازمة فى هذه الحالة موجودة ، ولها الشكل المبين على الرسم ٨٥ . من السهل ان نرى ان سدادة واحدة كهذ يمكنها فعلا سد الفتحات المربعة والمثلثة والمستديرة .

٨١ ـ وتوجد ايضا سدادة للفتحات المبينة على الشكل ٨٦ المستديرة والمربعة والصليبية الشكل ، وهى ممثلة فى الاوضاع الثلاثة

٨٢ ـ توجد مثل هذه السدادة ايضا : انت تستطيع ان تراه من الجوانب الثلاثة على الشكل ٨٧ .

(ان المسائل التى بحثناها الآن كثيرا ما تقابل الرسامين الهندسيين عندما يلزم تحديد شكل جزء ما من الماكينة بواسطة مساقطها الثلاثة)



شكل ٨٨

٨٣ – مهما بدت غرابة هذه المسألة ولكن امرار القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات خلال هذه الفتحة الصغيرة شيء ممكن. ولكن يلزم فقط ان تعرف كيف تقوم بهذه العملية . يجب ان تطوى الورقة بحيث تتمدد الفتحة المستديرة على شكل شق مستقيم (شكل ٨٨) وتمر خلال هذا الشق القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات .

يساعد الحساب الهندسى على تفهم هذه الخدعة التى تبدو معقدة للوهلة الاولى . ان قطر القطعة النقدية من فئة الكوبيكين هو ــ ١٨ مم ومحيطها كما هو من السهل حسابه يساوى ٥٦ مم (واكثر) . ومن الواضح انه يجب ان يكون طول الشق المستقيم اقل بمرتين من محيط الفتحة ، وبالتالى يساوى ٢٨ مم ، ولكن عرض القطعة من فئة الخمسة كوبيكات هو ٢٥ مم فقط . وهذا يعنى انها تستطيع ان تمر خلال الفتحة البالغ عرضها ٢٨ مم حتى لو اخذنا فى الاعتبار ان سمكها يساوى (١ ١/٢ مم) .

٨٤ – لتحديد ارتفاع البرج فى الواقع اعتمادا على الصورة يلزم قبل كل شيء قياس ارتفاع البرج وطول قاعدته فى الصورة

بادق قدر ممكن . فلنفرض ان الارتفاع فى الصورة ٩٥ مم ، وطول القاعدة ١٩ مم . عندئذ تقيس طول قاعدة البرج فى الحقيقة ولنفرض انه كان مساويا ١٤ م .

بعد اجراء ذلك تقول الآتى :

ان صورة البرج والخطوط الاصلية له متشابهة هندسيا . وبالتالى فان صورة الارتفاع ستكون اكبر من صورة القاعدة بعدد مرات كبر ارتفاع البرج فى الحقيقة عن طول القاعدة . العلاقة الاولى تساوى ٩٥ ÷ ١٩ اى ٥ ، من هنا نقول ان ارتفاع البرج اكبر من طول قاعدته بمقدار ٥ مرات وتساوى فى الحقيقة ١٤ × ٥ = ٧٠ م .

فاذن ارتفاع برج المدينة ٧٠ م .

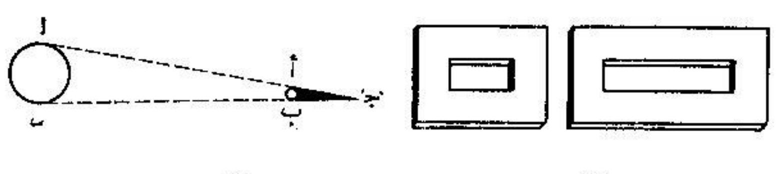
ولكن لابد وان نلاحظ انه لتحديد الارتفاع من الصورة الفوتوغرافية لا تصلح اى صورة لذلك اذ لابد وان تكون النسب غير مشوهة فى الصورة المستعملة كما يحدث ذلك لدى المصورين قليلى التجربة .

٨٥ ــ غالبا ما يجاب على السؤالين المطروحين فى المسألة بالايجاب . ولكن فى الحقيقة يكون المثلثان فقط متشابهين . اما المستطيلان الخارجى والداخلى واللذان على شكل اطار فليسا متشابهين عموما . ويكفى لتشابه المثلثات تساوى الزوايا . وبما ان اضلاع المثلث الداخلى توازى اضلاع المثلث الخارجى ، فان هذه الاشكال متشابهة ولكن لتشابه الاشكال عديدة الاضلاع ، لا يكفى تساوى

الزوايا فقط (او – وهو نفس الشيء – توازى الاضلاع بمفرده) بل يلزم كذلك ان تكون اضلاع الاشكال المتعددة الاضلاع متناسبة . وبالنسبة لرباعى الاضلاع الداخلى والخارجى فى شكل الاطار يتحقق ذلك فقط فى حالة المربعات (وعموما – فى حالة المعين) . وفى كل الاحوال الاخرى تكون اضلاع رباعى الاضلاع الخارجى غير متناسبة مع اضلاع رباعى الاضلاع الداخلى ، وبالتالى فان الشكلين غير متشابهين . ويصبح انعدام التشابه واضحا فى الاطارات قائمة الزاوية ذات الجوانب العريضة كما هو مبين على الشكل ٨٩ . فالنسبة بين الاضلاع الخارجية فى الاطار الايسر هى ٢ : ١ ، اما بين الاضلاع الداخلية فهى ٤ : ١ . وفى الاطار الايمن تكون النسبة بين الاضلاع الخارجية ٤ : ٣ ، وبين الاضلاع الداخلية ٢ : ١ .

٨٦ – وسيفاجأ الكثيرون انه عند حل هذه المسألة ستلزم معلومات من علم الفلك : عن المسافة ما بين الارض والشمس ، وعن مقدار قطر الشمس .

ويتحدد طول الظل الكامل الذى يولده السلك فى الفراغ بالرسم الهندسى المبين على الشكل ٩٠ . من السهل روٴية ان الظل اكبر من مقطع السلك بعدد المرات التى تكون فيها المسافة من الارض حتى الشمس (١٥٠٠٠٠٠٠٠ كم) اكبر من مقطع الشمس (١٤٠٠٠٠٠ كم). والعلاقة الاخيرة تساوى بعدد مقرب ، ١١٥ .



شكل ٩٠

شكل ٨٩

وهذا يعنى ان طول الظل الكامل الذى يولده السلك فى الفراغ يساوى

٤ × ١١٥ = ٤٦٠ مم = ٤٦ سم

وتفسر القيمة الصغيرة لطول الظل الكامل بانه لا يكون مرئيا على الارض او على جدران المنازل ، اما الخطوط الخفيفة التى ترى فليست ظلالا ولكن اشباه ظلال .

وقد اوردنا طريقة اخرى لحل مثل هذه المسائل عند بحث اللغز الثامن .

٨٧ ــ الاجابة بان قالب الطوب الخاص باللعب يزن ١ كجم اى اقل باربع مرات ، تعتبر خطأ فاحشا . اذا ان قالب الطوب الخاص باللعب ليس فقط اقصر باربع مرات من الحقيقى ولكن اضيق ايضا باربع مرات واقل ارتفاعا باربع مرات ايضا ، ولذلك فان حجمه ووزنه اقل بمقدار ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ مرة . وبالتالى فان الاجابة الصحيحة هى :

يزن قالب الطوب الخاص باللعب ٤٠٠٠ ÷ ٦٤ = ٦٢,٥ جم .

٨٨ – انت الآن مهيأ لان تحل هذا المسألة حلا صحيحا .
بما ان اشكال الجسم البشرى متشابهة تقريبا فعند ما يكون الانسان اطول بمرتين فهو لا يكون ذا حجم مضاعف وانما يكون حجمه اكبر بـ ٨ مرات . وهذا يعنى ان العملاق يزن اكثر من القزم بـ ٨ مرات .

واطول عملاق عرفت مقاييسه كان احد سكان الالزاس . وكان طوله ٢٧٥ سم اى اطول من الطول المتوسط للانسان بمتر كامل . واصغر قزم كان طوله اقل من ٤٠ سم ، اى كان اقصر من عملاق الالزاس بـ ٧ مرات تقريبا . ولذلك اذا وضعنا على احدى كفتى ميزان عملاق الالزاس فانه يلزم للتوازن وضع ٧ × ٧ × ٧ = ٣٤٣ قزما اى حشد كامل على الكفة الثانية .

٨٩ – حجم البطيخة الكبرى يزيد على حجم البطيخة الصغرى بمقدار

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}$$

اى الضعف تقريبا . هذا يعنى ان من الاربح شراء البطيخة الكبرى فهى اغلى بمرة ونصف فقط ، اما المادة الصالحة للأكل فيها فاكثر بمرتين .

ولكن لماذا لا يطلب الباعة ثمنا لهذا البطيخ ضعف الثمن عادة وانما اكثر منه بمرة ونصف فقط ؟ يفسر هذا ببساطة بأن الباعة

فى اغلب الاحيان ضعفاء فى الهندسة . وبالمناسبة فان المشترين ايضا ليسوا اقوياء فى الهندسة ، ولهذا نجدهم اغلب الاحيان يمتنعون عن اجراء صفقات رابحة . ويمكن القول بشجاعة ان من الاربح شراء البطيخ الكبير بالمقارنة مع البطيخ الصغير ، ذلك لانه يثمن عادة باقل من ثمنه الحقيقى ، ولكن اغلب المشترين لا يشكون فى ذلك .

لنفس السبب يكون شراء البيض الكبير الحجم دائما اربح من شراء البيض الصغير الحجم اذا لم تحدد اسعاره تبعا للوزن .

٩٠ ــ العلاقة ما بين المحيطات كعلاقة الاقطار . اذا كان محيط شمامة يساوى ٦٠ سم وشمامة اخرى ٥٠ سم فان النسبة ما بين قطريهما هى ٦٠ : ٥٠ = $\frac{٦}{٥}$ و تكون النسبة ما بين حجميهما هى :

$$\left(\frac{٦}{٥}\right)^{٣} = \frac{٢١٦}{١٢٥} \approx ١,٧٣$$

ويكون ثمن الشمامة الكبرى تبعا لحجمها (او لوزنها) اكبر بـ ١,٧٣ مرة بالنسبة الى الشمامة الصغرى او بتعبير آخر اغلى بمقدار ٧٣ ٪ . بينما يطلب ثمنا لها بـ ٥٠ ٪ اكثر فقط . من الجلى انه من الاربح شراؤها .

٩١ ــ نرى من شروط المسألة ان قطر الكرزة اكبر بـ ٣ مرات من قطر النواة . وهذا يعنى ان حجم الكرزة اكبر من حجم النواة بـ ٣ × ٣ × ٣ ، اى بـ ٢٧ مرة ، ويبلغ حجم النواة $\frac{١}{٢٧}$ من حجم الكرزة

اما حجم الجزء القابل للاكل منها فيساوى $\frac{٢٦}{٢٧}$. وبالتالى فان الجزء القابل للاكل من الكرزة اكبر من النواة حجما بـ ٢٦ مرة .

٩٢ ــ اذا كان النموذج اخف من الاصل بـ ٨٠٠٠٠٠٠ مرة وصنع الاثنان من معدن واحد ، فان حجم النموذج يجب ان يكون اقل من حجم الاصل بـ ٨٠٠٠٠٠٠ مرة . نحن نعرف ان احجام الاشكال المتشابهة تكون متناسبة كمكعب الارتفاعات . وبالتالى فان النموذج يجب ان يكون اقصر من الاصل بـ ٢٠٠ مرة ، لان :

$$٢٠٠ \times ٢٠٠ \times ٢٠٠ = ٨٠٠٠٠٠٠$$

ان ارتفاع البرج الحقيقى يساوى ٣٠٠ م . اذن فان ارتفاع النموذج لابد وان يساوى :

$$٣٠٠ \div ٢٠٠ = ١\frac{١}{٢} \text{ م}$$

اى ان النموذج سيكون بطول الانسان تقريبا .

٩٣ ــ الوعاءان جسمان متشابهان هندسيا . فاذا كان الوعاء الاكبر اكثر سعة بـ ٨ مرات لكانت كل مقاييسه الطولية اكبر بمرتين : اى اعلى بمرتين ، واوسع بمرتين فى كلا الاتجاهين . ولكن بما انه اعلى واوسع بمرتين فان سطحه اكبر بـ ٢ × ٢ ، اى بـ ٤ مرات ، لان سطوح الاجسام المتشابهة تتناسب كمربعات الابعاد الخطية . وعندما يكون سمك جدران الوعاء واحدا فان وزنه يتوقف على مقدار سطحه . من هنا نحصل على الجواب للسؤال

الوارد فى المسألة وهو : ان الوعاء الاكبر يكون اثقل من الاصغر باربع مرات .

٩٤ — نرى من الوهلة الاولى ان هذه المسألة غير رياضية تماما ، وتحل فى الواقع بنفس الطريقة الهندسية التى استخدمناها فى المسألة السابقة .

قبل ان نبدأ الحل ، لننظر مسألة شبيهة بهذه ولكنها ابسط .

لدينا قدران (او سماوران) ، احدهما كبير والآخر صغير ، مصنوعان من نفس المادة وبنفس الشكل ، مملوءان بماء مغل . ايهما سيبرد اولا ؟

تبرد الاشياء اساسا ابتداء من السطح ، وبالتالى سيبرد اولا القدر الذى يكون سطحه فى كل وحدة حجم اكبر : فاذا كان احدهما اعلى واعرض من الثانى ن من المرات فان سطحه يكون اكبر بـ ن٢ مرة ، اما حجمه فاكبر بـ ن٣ مرة . اى انه يصيب وحدة السطح الواحدة فى القدر الكبير حجم اكبر بـ ن مرة . وبالتالى يجب ان يبرد القدر الصغير اولا .

لنفس السبب ايضا لابد وان يبرد الطفل الذى يقف فى البرد اكثر من الانسان البالغ الذى يلبس نفس الملابس . لان كمية الحرارة التى تنبعث فى كل سنتيمتر مكعب من جسميهما واحدة تقريبا ولكن سطح الجسم الذى يبرد ، لكل سنتيمتر مكعب ، اكبر لدى الطفل منها لدى البالغ .

وينبغي ان نرى في ذلك ايضا سبب ان اصابع اليد او الانف تبرد اشد وتتجمد اكثر من اجزاء الجسم الاخرى التي يكون سطحها ليس بهذا الكبر عند مقارنتها بحجمها .

وتنسب الى ذلك ايضا المسألة الآتية :

لماذا يشتعل العود اسرع من كتلة الحطب السميكة التي اخذ منها العود ؟

بما ان التسخين يتم عن طريق السطح وينتشر الى كل حجم الجسم فانه يجب مقارنة سطح وحجم العود (وعلى سبيل المثال العود ذو المقطع الرباعي) مع سطح وحجم كتلة الحطب التي لها نفس الطول (وذات المقطع الرباعي ايضا) ، لكي نحدد مقدار سطح كل سنتيمتر مكعب من الخشب في الحالتين . فاذا كان سمك كتلة الحطب اكبر من سمك العود بـ ١٠ مرات ، فان السطح الجانبي لكتلة الحطب يكون اكبر من سطح العود ايضا بـ ١٠ مرات ، اما حجمه فيكون اكبر من حجم العود بـ ١٠٠ مرة . وبالتالي فان مقدار حجم وحدة السطح في العود اصغر بعشر مرات من مقداره في كتلة الحطب : نفس كمية الحرارة تسخن في العود مادة اقل بعشر مرات ، وهنا يكمن سبب اشتعال العود مبكرا اذا ماقورن بكتلة الحطب عندما يكون مصدر الحرارة واحدا . (نظرا لكون الخشب رديء التوصيل للحرارة فانه يجب اعتبار هذه العلاقات مقربة جدا ، اذ انها تميز السريان العام للعملية فقط وليس الناحية الكمية لها) .

الباب العاشر

هندســـة المطـــر والثلـــج

٩٥ ـ مقياس المطر (المغياث) . جرت العادة على اعتبار لينينجراد مدينة كثيرة المطر ، وأكثر مطرا بكثير من موسكو على سبيل المثال . ولكن للعلماء راى آخر ، فهم يؤكدون ان الامطار في موسكو تأتى بماء اكثر فى السنة بالمقارنة مع لينينجراد . فمن اين عرفوا ذلك ؟ هل يمكن قياس كمية المياه التى تاتى بها الامطار ؟

يبدو ان هذه مسألة صعبة ، وعلى الرغم من ذلك فانت تستطيع ان تتعلم بنفسك القيام بمثل هذا الحساب للمطر . لا تظن انه سيلزم لذلك جمع كل المياه التى يحملها المطر الى الارض . يكفى فقط قياس سمك طبقة المياه التى كانت ستتولد على الارض فيما اذا لم تسيح المياه الساقطة ولم تمتصها الارض . وليس من الصعب بتاتا اجراء ذلك . فان المطر عند هطوله يسقط على كل المنطقة بالتساوى . ولا يحدث ان يسقط ماء على جزء اكثر منه على الجزء المجاور . يكفى فقط لذلك قياس سمك طبقة ماء المطر

على اى مساحة ، وسنعرف سمكه على كل المساحة التى سقط عليها المطر .

والآن لابد وان تكون قد فطنت الى ما يجب عمله لقياس سمك طبقة الماء التى يحملها المطر . يلزم لذلك اعداد ولو مساحة صغيرة من الارض لا يمتص فيها ماء المطر ولا يتدفق الماء بعيدا عنها . ويفيد لهذا الغرض اى وعاء مكشوف كالجردل مثلا . فاذا كان لديك جردل ذو جدران عمودية (بحيث يكون الفاصل بين الجدران واحدا من اعلى ومن اسفل) فضعه تحت المطر فى مكان مكشوف* . وعند توقف المطر ، قس ارتفاع الماء الذى تجمع فى الجردل — وسيكون لديك عندئذ كل ما هو مطلوب للحسابات .

ولنستخدم بصورة مسهبة اكثر « مقياس المياه » البسيط هذا . كيف نقيس ارتفاع مستوى الماء فى الجردل ؟ هل نضع فى الماء مسطرة قياس ؟ ولكن هذا يكون مريحا فقط فى حالة وجود ماء كثير فى الجردل . واذا ما كان سمك طبقته لا يزيد ، كما يحدث عادة ، عن ٢ — ٣ سم او حتى بضعة مليمترات ، فلا يمكن ، طبعا ، قياس سمك الطبقة المائية بهذه الطريقة باى قدر من الدقة . ومن المهم هنا قياس كل مليمتر حتى كل جزء عشرى من المليمتر . فما العمل ؟

---

* ضع الجردل فى مكان عال عن الارض حتى لا يقع فيه رذاذ الماء الناجم عن اصطدام المطر بالارض .

ان افضل شيء هو ان نسكب الماء في اناء زجاجي اكثر ضيقا . وسيصل الماء في مثل هذا الاناء الى مستوى اعلى ، ومن السهل رؤية ارتفاع المستوى خلال الجدران الشفافة . انت تفهم ان ارتفاع الماء المقاس في الاناء الضيق ليس هو سمك الطبقة المائية التي يلزمنا قياسها . ولكن من السهل تحويل قياس الى آخر . فلتفرض ان قطر قاع الاناء الضيق هو اقل بعشر مرات من قطر قاع الجردل المستخدم لقياس المطر . ومساحة القاع ستكون عندئذ اقل من مساحة قاع الجردل بـ ١٠ × ١٠ اي بـ ١٠٠ مرة . ومن المفهوم ان الماء المسكوب من الجردل يجب ان يكون في الاناء الزجاجي اعلى بـ ١٠٠ مرة . وهذا يعني انه اذا كان سمك طبقة ماء المطر في الجردل ٢ مم فانه في الاناء الضيق سيكون نفس الماء على مستوى ٢٠٠ مم اي ٢٠ سم .

وانت ترى من هذا الحساب ان الاناء الزجاجي بالمقارنة بالجردل — مقياس المطر لا يجب ان يكون ضيقا جدا ، والا للزم الامر ان يكون مرتفعا جدا . ويكفي تماما ان يكون الاناء الزجاجي اضيق من الجردل بـ ٥ مرات ، عندئذ تكون مساحة قاعه اقل بـ ٢٥ مرة من مساحة قاع الجردل ، ويرتفع مستوى الماء المسكوب بمثل عدد هذه المرات . وسيقابل كل مليمتر من سمك الطبقة المائية في الجردل ٢٥ مم من ارتفاع الماء في الاناء الضيق . لذا فمن المستحسن لهذا السبب لصق شريط من الورق على الجدار الخارجي

للاناء الزجاجى وترسم عليه تقسيمات كل ٢٥ مم ، وتأشيرها بالارقام ١ ، ٢ ، ٣ .. الخ . عندئذ تستطيع مباشرة بالنظر الى ارتفاع الماء فى الاناء الضيق معرفة سمك طبقة الماء فى الجردل – مقياس المطر دون اى حسابات . اذا كان قطر مقطع الاناء الضيق اقل من مقطع الجردل لا بـ ٥ ، ولكن لنقل بـ ٤ مرات فيلزم رسم التقسيمات على الجانب الزجاجى كل ١٦ مم .. الخ .

ولا يناسب بتاتا ان نسكب الماء فى اناء القياس الضيق من الجردل عبر الحافة . من المستحسن ان نصنع فى جدار الجردل ثقبا مستديرا صغيرا ونضع فيه انبوبة زجاجية ذات سدادة . ومن المناسب اكثر سكب الماء خلاله .

وهكذا يتوفر لديك جهاز لقياس سمك طبقة مياه المطر . وبالطبع فان الجردل واناء القياس البسيط لا يحسبان بدقة مياه المطر كمقياس المطر الحقيقى وقدح القياس الحقيقى اللذين يستخدمان فى محطات الارصاد الجوية . ولكن اجهزتك الرخيصة البسيطة يمكن ان تساعدك فى اجراء كثير من الحسابات ذات الدلالة .

وسننتقل الآن الى هذه الحسابات .

٩٦ – ما هى كمية الامطار ؟ افرض انه يوجد بستان خضار ، طوله ٤٠ م وعرضه ٢٤ م . هطل المطر ، وتريد ان تعرف كمية الماء التى تساقطت على البستان . كيف تحسب ذلك ؟

لابد من البدأ ، طبعا ، من تحديد سمك طبقة مياه المطر :

بدون هذا الرقم لا يمكن عمل اى حسابات . لنفرض ان مقياس المطر البسيط الذى لديك يبين ان المطر قد سقط بطبقة سمكها ٤ مم . سنحسب كم عدد السنتيمترات المكعبة من الماء كانت تتبقى فى كل متر مربع من البستان لو لم تمتص الارض المياه . علما ان عرض المتر المربع ١٠٠ سم وطوله ١٠٠ سم ، وتغطيه طبقة من الماء سمكها ٤ مم ، اى ٠,٤ سم . هذا يعنى ان حجم طبقة الماء هذه يساوى

١٠٠ × ١٠٠ × ٠,٤ = ٤٠٠٠ سم٣

انت تعرف ان ١ سم٣ من الماء يزن ١ جم . اذن فقد تساقط على كل متر مربع من البستان ٤٠٠٠ جم من ماء المطر ، اى ٤ كجم . ولكن مساحة البستان كله تبلغ ٤٠ × ٢٤ = ٩٦٠ م٢ . وهذا يعنى انه بسقوط المطر انسكب على البستان ٤ × ٩٦٠ = = ٣٨٤٠ كجم من الماء ، اى ما لا يقل عن ٤ اطنان .

وللايضاح احسب ايضا عدد جرادل المياه الواجب حملها الى البستان لاروائه بنفس كمية المياه التى حملها اليه المطر . فاذا علمنا ان الجردل العادى يتسع لحوالى ١٢ كجم من المياه ، اذن فان المطر قد اسقط ٣٨٤٠ ÷ ١٢ = ٣٢٠ جردلا من الماء .

وهكذا كان يلزم ان تروى البستان باكثر من ٣٠٠ جردل ماء لكى تحل محل ما رواه به المطر الذى هطل لمدة تقرب من الربع ساعة .

كيف يتمثل بالاعداد المطر الشديد والضعيف ؟ يلزم لذلك تحديد عدد مليمترات المياه (اى الطبقة المائية) التى تتساقط فى دقيقة واحدة من هطول المطر — وهو ما يسمى « بقوة الامطار » . اذا كان المطر يسقط ٢ مم فى المتوسط كل دقيقة ، فان هذا يؤلف وابلا شديدا للغاية من المطر . اما عندما يتساقط رذاذ مطر خريفى بسيط فان ١ مم من الماء يتجمع خلال ساعة كاملة او اكثر .

وكما ترى فان حساب كمية المياه التى تسقطها الامطار ليس امرا ممكنا فقط ولكنه حتى غير معقد بتاتا . علاوة على ذلك فانك كنت تستطيع اذا اردت ان تحدد بالتقريب حتى عدد النقط المنفردة التى يسقطها المطر* . وفعلا فعند هطول المطر العادى تزن القطرات فى المتوسط بحيث يعادل وزن كل ١٢ قطرة ١ جم . وهذا يعنى انه تسقط على كل متر مربع من البستان عندما تكون كمية المطر المذكورة واحدة ٤٠٠٠ × ١٢ = ٤٨٠٠٠ قطرة .

من السهولة بعد ذلك حساب عدد القطرات التى سقطت على كل البستان . ولكن حساب عدد القطرات هى عملية حب استطلاع فقط وليس منها منفعة . ولقد اوردنا هذا الحساب فقط لكى نبين

---

* يسقط المطر دائما على هيئة قطرات — حتى عندما يتراءى لنا انه يسقط على شكل سيول منهمرة .

اى الحسابات التى تبدو للوهلة الاولى مستحيلة يمكن اجراؤها اذا ما عرفنا كيفية القيام بها .

٩٧ – ما هى كمية الثلج ؟ لقد تعلمنا قياس كمية المياه التى يحملها المطر . فكيف يمكن قياس كمية المياه الناتجة عن سقوط البرد ؟ بنفس هذه الطريقة تماما . يسقط البرد فى مقياس المطر ويذوب ثم تقيس الماء المتكون من البرد وتحصل على ما تريد .

لكن الماء الذى يحمله الثلج يقاس . ولو اتبعنا نفس الطريقة السابقة فى قياس المطر لكنا قد حصلنا على نتائج غير دقيقة تماما ، لان الثلج الذى يسقط فى الجردل يتطاير منه بسبب الرياح . ولكن عند حساب الماء المتكون من الثلج يمكن ان نقوم بذلك بدون مقياس المطر : فيقاس مباشرة سمك طبقة الثلج التى تغطى الفناء او الحديقة او الحقل بواسطة عصا من الخشب (قضيب مساح) . ولمعرفة سمك طبقة الماء الناتجة عن ذوبان هذا الثلج يلزم القيام بالتجربة التالية : يملأ جردل بالثلج بنفس الرخاوة وندعة يذوب ونلاحظ ارتفاع طبقة الماء المتكونة . بهذه الطريقة نستطيع تحديد كم من المليمترات يكون ارتفاع طبقة الماء المتكونة من كل سنتيمتر من طبقة الثلج . وبمعرفة هذا يسهل عليك ان تحول سمك الطبقة الثلجية الى سمك مائى ..

واذا ما اجريت كل يوم وبلا تخلف قياس كمية مياه المطر طيلة اوقات السنة الدافئة وتضيف الى ذلك المياه المحفوظة خلال الشتاء بشكل ثلج فانك ستعرف الكمية الكلية من الماء التى تسقط فى منطقتك . وهذه انتيجة هامة جدا لتحديد كمية الامطار التى تسقط فى المنطقة قيد البحث . (وتسمى « بالامطار » كل المياه الساقطة عموما ، ان كانت على شكل مطر او برد او ثلج .. الخ) .

واليكم متوسط كمية الامطار الساقطة كل عام فى مدن الاتحاد السوفييتى المختلفة :

لينينجراد	٤٧ سم ،	استراخان	١٤ سم
فولوجدا	٤٥ سم ،	كوتائيسى	١٧٩ سم
ارخانجلسك	٤١ سم ،	باكو	٢٤ سم
موسكو	٥٥ سم ،	سفردلوفسك	٣٦ سم
كاستروما	٤٩ سم ،	تابولسك	٤٣ سم
كازان	٤٤ سم ،	سيميبالاتينسك	٢١ سم
كويبيشيف	٣٩ سم ،	الما ـ اتا	٥١ سم
تشكالوف	٤٣ سم ،	طشقند	٣١ سم
اوديسا	٤٠ سم ،	ينيسيسك	٣٩ سم
		اركوتسك	٤٤ سم

من بين كل المدن المذكورة يكون نصيب كوتائيسى من الماء الساقط من السماء اكثر من الاماكن الاخرى (١٧٩ سم) ، واقلها استراخان (١٤ سم) ، اى بمقدار ١٣ مرة اقل من كوتائيسى . ولكن توجد اماكن على الكرة الارضية تسقط فيها كمية اكبر بكثير من المياه بالمقارنة مع كوتائيسى . فمثلا يوجد مكان فى الهند تغمره مياه الامطار تماما ، اذ يسقط هناك فى العام ١٢٦٠ سم ، اى $\frac{١}{٢}$ ١٢ م ! وحدث مرة ان سقط هناك خلال يوم واحد اكثر من ١٠٠ سم من المياه . بينما توجد ، على العكس ، اماكن تسقط فيها كمية من المطر اقل بكثير مما فى استراخان : ففى احدى مناطق امريكا الجنوبية ، فى شيلى ، لا يصل مجموع ما يتساقط خلال عام كامل ١ سم من الامطار .

ان المنطقة التى يسقط فيها اقل من ٢٥ سم من الامطار فى العام تعتبر من المناطق الجافة . لا يمكن فى هذه الاماكن زراعة الحبوب بدون اجراء الرى الصناعى .

واذا لم تكن تقطن فى احدى المدن التى ذكرناها فى الجدول السابق فينبغى عليك ان تقيس بنفسك كمية الامطار الساقطة فى منطقتك . فتقوم باجراء القياسات بصبر على مدار السنة ، وتعرف كمية المياه التى يحملها كل مطر او برد وكمية المياه المختزنة فى الثلج ، وبالنتيجة تحصل على فكرة عن الموقع الذى تحتله مدينتك ، من حيث نسبة الرطوبة بين المدن الاخرى .

ومن السهل ان تفهم انه بقياس كمية المياه التى تسقط فى العام فى اماكن مختلفة من الكرة الارضية ، يمكنك من هذه الارقام معرفة طبقة المياه التى تسقط فى المتوسط خلال عام على كل الارض عموما . وقد تبين ان متوسط كمية الامطار الساقطة على اليابسة (دون حساب كميتها فوق المحيطات) خلال العام هى ٧٨ سم . ويعتقد انه تسقط فوق مساحة معينة من المحيطات نفس كمية الامطار تقريبا التى تسقط على مساحة مساوية من اليابسة . ومن السهل حساب كمية المياه التى تسقط على كل كوكبنا سنويا عن طريق المطر والبرد والثلج .. الخ . ولكن يجب من اجل ذلك معرفة مقدار سطح الكرة الارضية . واذا لم يتوفر لديك المصدر لمعرفة هذا العدد فيمكنك ان تحسبه بنفسك بالطريقة الآتية :

انت تعرف ان المتر يؤلف بدقة تقريبا ٤٠ جزءا من مليون من محيط الكرة الارضية . او بتعبير آخر ان محيط الارض يساوى ٤٠٠٠٠٠٠٠ م اى ٤٠٠٠٠ كم . ومقطع اى دائرة يكون اصغر بمقدار $٣\frac{١}{٧}$ مرة تقريبا من محيطها . وبمعرفة هذا يمكن ان نجد قطر كوكبنا :

$$٤٠٠٠٠ \div ٣\frac{١}{٧} \approx ١٢٧٠٠ \text{ كم}$$

ان قاعدة حساب سطح اى كرة هى كالآتى : يلزم ضرب القطر فى نفسه وفى $٣\frac{١}{٧}$:

$$١٢٧٠٠ \times ١٢٧٠٠ \times \frac{١}{٧}٣ \approx ٥٠٩\ ٠٠٠\ ٠٠٠ \text{ كم}^{٢}$$

(ابتداء من الرقم الرابع للنتيجة نكتب اصفار لان المؤكد منها الثلاثة ارقام الاولى فقط) .

وهكذا فان مجموع سطح الكرة الارضية يساوى **٥٠٩** ملايين كيلومتر مربع .

لنعد الآن ثانية الى مسألتنا . سنحسب كم من المياه تسقط على كل كيلومتر مربع واحد من سطح الارض . يسقط على المتر المربع الواحد او على ١٠ ٠٠٠ سم^{٢} :

$$٧٨ \times ١٠\ ٠٠٠ = ٧٨٠\ ٠٠٠ \text{ سم}^{٣}$$

وبما انه فى الكيلومتر المربع ١٠٠٠ × ١٠٠٠ = ١٠٠٠٠٠٠ م^{٢} . اذن يسقط عليه من الماء :

$$٧٨٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠ \text{ سم}^{٣} \text{ او } ٧٨٠\ ٠٠٠ \text{ م}^{٣}$$

ويسقط على كل سطح الارض :

$$٧٨٠\ ٠٠٠ \times ٥٠٩\ ٠٠٠\ ٠٠٠ = ٣٩٧\ ٠٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠ \text{ م}^{٣}$$

ولتحويل هذا العدد من امتار مكعبة الى كيلومترات مكعبة يلزم ان نقسم النتيجة على ١٠٠٠ × ١٠٠٠ × ١٠٠٠ اى على مليار . فنحصل على ٣٩٧ ٠٠٠ كم^{٣} .

وهكذا يسقط من السماء على سطح كوكبنا فى كل عام حوالى ٤٠٠٠٠٠ كم٣ من الماء .

بذلك ننهى حديثنا عن هندسة المطر والثلج . ويمكن الاطلاع على كل ما تحدثنا عنه هنا بصورة تفصيلية اكبر بالرجوع الى كتب الارصادات الجوية .

الباب الحادى عشر

الرياضيـــــات واسطـــورة الطوفـــــان

٩٨ ـ اسطورة الطوفان . نجد بين الاساطير الخيالية الكثيرة الواردة فى الكتب القديمة اسطورة تقول ان العالم كله قد غرق فى غابر الازمان بفعل امطار كانت اعلى من اعلى الجبال . وحسب ما يرد فى هذه الكتب فان الرب قد « ندم مرة على انه خلق الانسان على الارض » وقال :

ـ سأهلك البشر الذين خلقتهم على سطح الارض (اى على سطح الكرة الارضية) : من البشر حتى المواشى ، والزواحف والطيور السماوية سأهلكها (كلها) .

وكان الانسان الوحيد الذى اراد الله ان يرحمه عندئذ ، هو التقى نوح . ولذلك فقد حذره الرب مما يجرى من تحضيرات لهلاك العالم وأمر ببناء سفينة كبيرة (وسمى فى الكتب القديمة بـ « الفلك ») بالمقاييس الآتية : « طول الفلك ـ ٣٠٠ ذراع ، عرضه ٥٠ ذراعا ، وارتفاعه ٣٠ ذراعا » وكان الفلك يتألف من ثلاثة طوابق . وكان يجب ان ينجو على هذه السفينة ليس نوح فقط مع اسرته

واسر ابنائه البالغين ، ولكن كل اصناف الحيوانات على الارض . واصدر الرب امره الى نوح ان يأخذ فى الفلك زوجا واحدا من كل اصناف هذه الحيوانات مع احتياطى من المأكولات لها لمدة طويلة .

واختار الرب الفيضان الناجم عن الامطار كوسيلة لاهلاك كل ما هو حى على اليابسة . ووجب على الماء ان يقضى على كل الناس وكل اصناف الحيوانات التى تعيش على الارض . بعد ذلك يجب ان تظهر من نوح ومن الحيوانات التى انقذت معه سلالة انسانية جديدة وعالم حيوانى جديد .

ويذكر فى الكتب القديمة انه « بعد سبعة ايام جاءت مياه الفيضان الى الارض .. وهطلت الامطار على الارض طيلة ٤٠ يوما و ٤٠ ليلة .. وتزايدت المياه ورفعت الفلك وطاف فوق الماء .. وازدادت المياه فوق الارض بصورة خارقة بحيث تغطت كل الجبال العالية التى توجد تحت السماء وارتفعت فوقها بمقدار ١٥ ذراعا ... فهلك كل ما كان موجودا على سطح الارض . بقى نوح فقط وما كان معه فى الفلك » . وتروى الاسطورة ان المياه بقيت على الارض ــ مدة ١١٠ ايام اخرى ، وبعد ذلك اختفت ، وغادر نوح الفلك ومعه كل الاحياء التى انقذت ، لكى يعمر مرة اخرى الارض الخالية .

سنضع سؤالين بشأن هذه الاسطورة :

١) هل كان من الممكن حدوث مثل هذا السيل الذى غطى الكرة الارضية كلها باعلى من اعلى الجبال ؟

٢) هل كان يستطيع فلك نوح ان يتسع لكل اصناف حيوانات الارض ؟

٩٩ـ هل كان حدوث الطوفان ممكنا ؟ تقدم الرياضيات الاجوبة على هذا السؤال وغيره ايضا .

من اين امكن ان تأتى المياه التى سقطت مع امطار الطوفان ؟ بالطبع من الجو فقط . والى اين ذهبت بعد ذلك ؟ ان التربة ما كانت لتستطيع امتصاص محيط عالمى كامل كما انها ما كانت ، بلاريب ، لتستطيع مغادرة كوكبنا ايضا . والمكان الوحيد الذى امكن ان تذهب اليه كل هذه المياه ـ هو المحيط الجوى للارض : حيث ان ماء الفيضان كان يمكن ان يتبخر فقط ويتحول الى غشاء هوائى للارض . وهناك لابد وان تظل هذه المياه الى الآن . اذن ، لو ان كل بخار الماء الموجود الآن فى الجو قد تحول الى ماء وسقط على الارض فانه لكان من الممكن حدوث طوفان مرة اخرى ، ولغطت المياه اعلى الجبال . فلنراجع هل هذا صحيح .

نبحث فى كتاب عن الارصادات الجوية عن كمية الرطوبة الموجودة فى المحيط الجوى الارضى . سنعرف ان عمود الهواء الذى يرتكز على متر مربع يحتوى فى المتوسط على ١٦ كجم من بخار الماء ، ولا يمكن ان يحتوى ابدا على اكثر من ٢٥ كجم . سنحسب اذن سمك الطبقة المائية التى تتكون لو سقط على الارض كل هذا البخار بشكل مطر . ان ٢٥ كجم اى ٢٥٠٠٠ جم

من الماء تشغل حجما قدره ٢٥ ٠٠٠ سم٣ . وهذا هو حجم الطبقة التى مساحتها ١ م٢ اى ١٠٠ × ١٠٠ او ١٠٠٠٠ سم٢ . وبقسمة الحجم على مساحة القاعدة نحصل على سمك الطبقة وهو

٢٥ ٠٠٠ ÷ ١٠٠٠٠ = ٢,٥ سم

ان الطوفان ما كان ليرتفع اعلى من ٢,٥ سم عن سطح الارض لانه لا يوجد ماء * آخر فى المحيط الجوى . كما ان هذا الارتفاع من الماء كان سيتحقق فقط فى حالة عدم امتصاص الارض للمطر الساقط ابدا .

ان الحساب الذى اجريناه يظهر ان ارتفاع الماء الذى كان ممكنا عند حدوث الطوفان ، ان كانت مثل هذه الكارثة قد حدثت فعلا ، هو ٢,٥ سم . وهذا الرقم لا يمكن مقارنته بالمسافة الى قمة اعلى الجبال وهو ايفرست والتى يبلغ ارتفاعها ٩ كم . ان ارتفاع الفيضان مضخم فى الاسطورة القديمة بما لا يقل عن ٣٦٠ ٠٠٠ مرة !

وهكذا فلو كان الطوفان العظيم المطرى قد حدث فعلا فان هذا لما كان فيضانا ابدا ، بل مطرا ضعيفا جدا ، لانه كان

---

* لا يسقط فى كثير من مناطق الكرة الارضية فى مرة واحدة اكثر من ٢,٥ سم من الامطار ، وهى لا تنتج فقط من الهواء الموجود فوق هذه المنطقة و لكن من هواء الاماكن المجاورة الذى يأتى الى هذا المكان مع الرياح . اما الطوفان العظيم فقد حدث فى نفس الوقت على كل سطح الارض ، ولم تستطع اية منطقة ان تستعير الرطوبة من مكان آخر .

سيعطى خلال ٤٠ يوما من السقوط المستمر كمية من المياه ارتفاعها ٢٥ مم فقط ، اى اقل من نصف مليمتر فى اليوم . والمطر الخريفى الضعيف ، الذى يسقط طيلة يوم واحد ، يعطى ماء يزيد عن ذلك بـ ٢٠ مرة .

١٠٠ ـ هل يمكن بناء فلك نوح ؟ والآن لنبحث السؤال الثانى . هل كان من الممكن ان يسع فلك نوح كل اصناف الحيوانات الموجودة على الارض ؟

فلنحسب « مساحة السكن » فى الفلك . فتبعا للاسطورة القديمة كان الفلك مؤلفا من ثلاثة طوابق . وكانت ابعاد كل طابق كالآتى : ٣٠٠ ذراع فى الطول و ٥٠ ذراعا فى العرض . علما بان « الذراع » عند الشعوب القديمة لآسيا الغربية كان وحدة قياس تساوى تقريبا ٤٥ سم او ٠,٤٥ م ، وهذا يعنى انه بمقاييسنا تكون ابعاد كل طابق فى الفلك كالآتى :

الطول : $٣٠٠ \times ٠,٤٥ = ١٣٥$ م

العرض : $٥٠ \times ٠,٤٥ = ٢٢,٥$ م

ومساحة الارضية : $١٣٥ \times ٢٢,٥ \approx ٣٠٤٠$ م^{٢} .

اذن ، ان « مساحة السكن » الكلية لكل الطوابق الثلاثة فى فلك نوح تساوى :

$$٣٠٤٠ \times ٣ = ٩١٢٠ م^{٢}$$

هل تكفى هذه المساحة لوضع حتى كل اصناف الحيوانات الثديية الموجودة على الكرة الارضية ؟ ان عدد الاصناف المختلفة للحيوانات الثديية يساوى حوالى ٣٥٠٠ . كان على نوح ان يعطى مكانا لا للحيوان نفسه فقط ولكن ايضا لاحتياطى العلف له لمدة ١٥٠ يوما وهى مدة الطوفان . واما للحيوانات المفترسة فكان يلزم وجود مكان لها ومكان للحيوانات التى تتغذى بها ، وكذلك لعلف هذه الحيوانات . بينما لم يكن فى الفلك فى المتوسط لكل زوج من الحيوانات الجارى انقاذها سوى :

$$\frac{٩١٢٠}{٣٥٠٠} = ٢,٦ \text{ م}^{٢}$$

من الواضح ان هذا « المعدل المعيشى » ما كان ليكفى ، وبالاخص اذا أخذنا بعين الاعتبار ان جزءا من المكان كانت تشغله عائلة نوح الكثيرة الافراد ، وانه بالاضافة الى ذلك كان يلزم ترك ممر بين الاقفاص .

ولكن وجب على نوح ان يجد المأوى فى الفلك بالاضافة الى الحيوانات الثديية لانواع اخرى من حيوانات الارض ، غير الكبيرة جدا ، ولكنها اكثر تنوعا . وعددها ، تقريبا ، هو :

الطيور	١٣٠٠٠
الزواحف	٣٥٠٠

البرمائيات ١٤٠٠

العنكبوتيات ١٦٠٠٠

الحشرات ٣٦٠٠٠٠

علما بان المكان كان ضيقا بالنسبة للحيوانات الثديية فى الفلك ، فما الحال بالنسبة لهذه الحيوانات ، انه ما كان ليكفيها بتاتا . ووجب ليتسع الفلك لكل انواع الحيوانات الارضية ، ان يكون اكبر بعدد كبير من المرات . ومع ذلك فبالمقاييس المبينة فى الكتب القديمة فان الفلك كان عبارة عن سفينة ضخمة جدا تبلغ « حمولتها » ، على حد تعبير البحارة ، ٢٠٠٠٠ طن . وليس من المحتمل ابدا ان يستطيع البشر فى تلك الازمنة الغابرة ، حيث كان تكنيك بناء السفن لا يزال فى فترة الطفولة ، بناء سفينة بهذه المقاييس . وعلى الرغم من ذلك فان الفلك كان غير كبير بدرجة كافية لتحقيق الغرض الذى نسبته اليه الاسطورة القديمة . ولوجب على الفلك ان يكون حديقة حيوان كاملة مع احتياطى من العلف يكفى لمدة ٥ اشهر .

باختصار ان الاسطورة القديمة عن الطوفان العظيم لا تتفق مع الحسابات الرياضية البسيطة لدرجة انه من الصعب ان نجد فيها حتى جزءا صغيرا من اى شىء يطابق الواقع . واغلب الظن انها استوحيت من فيضان محلى ، اما الباقى فهو من ابتداع الخيال الشرقى الغنى .

الباب الثانى عشر

ثلاثـــون مسألـــة مختلفـــة

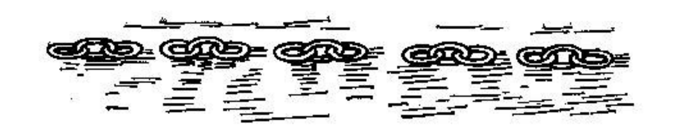
آمل ان لا تمر مطالعة القارئ لهذا الكتاب دون ان تترك فيه اثرا ، وان لا يقتصر الامر على الترفية عنه فقط ، بل اكسبته المنفعة بتنمية فطنته وسرعة خاطره ، وعلمته ان يستغل معارفه بمقدرة افضل . ومن المحتمل ان القارئ نفسه يريد الآن ان يختبر فراسته على اى شيء . من اجل ذلك خصصت هذه الثلاثون مسألة المتنوعة والموضوعة هنا فى آخر باب من كتابنا .

١٠١ — السلسلة . احضر الى الحداد ٥ قطع من سلسلة توجد ٣ حلقات فى كل قطعة ، وطلب توصيلها فى سلسلة واحدة .

اخذ الحداد يفكر قبل ان يبدأ العمل كم حلقة يلزم ان تفتح ثم تقفل بعد ذلك . وقرر انه سيلزم فتح وقفل اربع حلقات .

لكن ، هل يمكن تنفيذ العمل بفتح وقفل عدد اقل من الحلقات ؟

١٠٢ — العناكب والخنافس . جمع طفل فى علبة عناكب وخنافس مجموعها ٨ . لو عددنا عدد الارجل فى العلبة لظهر انها ٥٤ رجلا .



شكل ٩١ . خمسة قطع من السلسلة

كم هو عدد العناكب والخنافس فى العلبة ؟

١٠٣ ــ معطف المطر ، والقبعة ، والجرموق (الكالوش) .

اشترى احدهم معطف مطر وقبعة وجرموق ودفع مقابلها ٢٠ روبلا . فاذا علم ان ثمن معطف المطر اكبر بـ ٩ روبلات من ثمن القبعة ، ومجموع ثمن القبعة ومعطف المطر معا يزيد ١٦ روبلا على ثمن الجرموق . كم يساوى ثمن كل واحد منها ؟

المطلوب حل المسألة شفويا وبدون معادلات .

١٠٤ ــ بيض الدجاج والبط . لدينا سلات فيها بيض ، وكان فى بعض السلات بيض دجاج ، وفى البعض الآخر بيض بط وعددها ٥ ، ٦ ، ١٢ ، ١٤ ، ٢٣ ، ٢٩ . وقد فكر البائع مع نفسه قائلا : « لو اننى بعت هذه السلة فسيبقى لدى بيض دجاج اكثر بالضعف من بيض البط » .

اية سلة كان يقصدها البائع ؟

١٠٥ ــ الطيران . تقطع الطائرة المسافة من مدينة أ الى مدينة

ب فى ساعة واحدة و ٢٠ دقيقة . ولكن الطيران العكسى يتم فى ٨٠ دقيقة . كيف تفسر ذلك ؟

١٠٦ – الهدايا النقدية . اعطى احد الآباء لابنه ١٥٠ روبلا واعطى اب آخر لابنه ١٠٠ روبل . ولكن اتضح ان كلا الابنين معا قد زادا من رأسمالهما بـ ١٥٠ روبلا فقط . كيف تعلل ذلك ؟

١٠٧ – قطعتان من لعبة الداما . يجب ان توضع على لوحة لعبة الداما الخالية قطعتا داما مختلفتا اللون . ما عدد الاوضاع المختلفة التى يمكن ان يتخذاها على اللوحة ؟

١٠٨ – برقمين . ما هو اقل عدد موجب صحيح يمكن ان تكتبه برقمين ؟

١٠٩ – الواحد . عبر عن رقم ١ باستعمال كل الارقام العشرة .

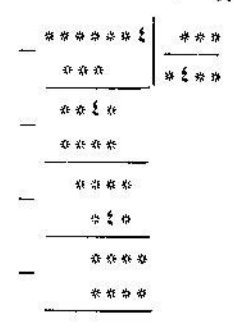
١١٠ – بخمس تسعات . عبر عن الرقم ١٠ بخمس تسعات . اذكر طريقتين لذلك على اقل تقدير .

١١١ – بعشرة ارقام . عبر عن الرقم ١٠٠ باستخدام كل الارقام العشرة . بكم طريقة تستطيع ان تفعل ذلك ؟ وتوجد هناك على الاقل اربع طرق .

١١٢ – باربع طرق . عبر عن الرقم ١٠٠ بواسطة خمسة ارقام متساوية وباربع طرق مختلفة .

١١٣ – باربع آحاد . ما هو اكبر عدد يمكن كتابته باربع آحاد ؟

١١٤ ــ القسمة الغامضة . فى المثال التالى للقسمة استبدلت كافة الارقام بنجوم عدا اربع اربعات . ضع بدلا من النجوم تلك الارقام التى استبدلت النجوم بها :



ولهذه المسألة عدة حلول مختلفة .

١١٥ ــ حالة اخرى للقسمة . اعمل نفس الشىء مع مثال آخر تركت فيه سبع سبعات فقط :

```
  **٧*******  | ****٧*
- ******      |--------
  ----------  | **٧**
  *****٧*
- *******
  ----------
    *٧****
-   *٧****
  ----------
    *******
-   ****٧**
  ----------
       ******
-      ******
  ----------
```

١١٦ — ما الذى سينتج ؟ تصور فى ذهنك لاى طول سيمتد الشريط ، المكون من كل المربعات المليمترية لمتر واحد مربع ، على ان تكون موضوعة واحدة ملاصقة للاخرى .

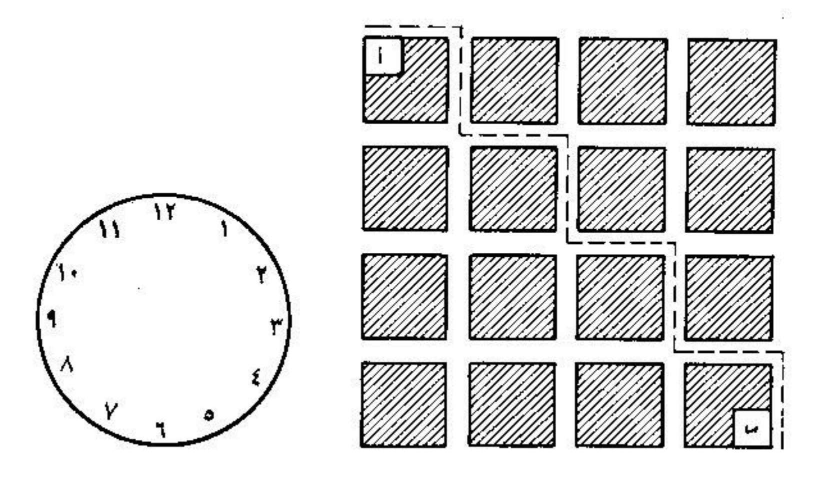
١١٧ — بنفس الطريقة . تصور فى ذهنك لاى ارتفاع يرتفع العمود ، المتكون من كل المكعبات المليمترية لمتر مكعب واحد ، موضوعة واحدة فوق الاخرى .

١١٨ — الطائرة . طائرة يبلغ طول باع جناحيها ١٢ م ، التقطت لها صورة من الاسفل اثناء تحليقها عندما مرت عموديا فوق جهاز التصوير . ارتفاع آلة التصوير ١٢ سم قياس الصورة ٨ مم .
على اى ارتفاع كانت تحلق الطائرة فى وقت التصوير ؟

١١٩ — مليون من القطع المنتجة . تزن القطعة المنتجة ٨٩,٤ جم . تصور فى ذهنك كم تزن مليون قطعة من هذه القطع .

١٢٠ — عدد الطرق . ترى على الشكل ٩٢ بيتا صيفيا فى الغابة . وتقسمه الممرات الى اقسام مربعة . ويبين الخط المتقطع الطريق المؤدى عبر الممرات من نقطة ا الى نقطة ب . وهذا ، بالطبع ليس الطريق الوحيد ما بين النقطتين المبينتين خلال الممرات . ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكنك ان توصلها ما بين النقطتين شرط ان تكون ذات طول واحد ؟

١٢١ — قرص الساعة . يلزم تقسيم قرص الساعة هذا (شكل ٩٣) الى ٦ اجزاء ذات اى شكل — بحيث يكون مجموع الاعداد ، على كل جزء ، واحدا فى كل حالة .



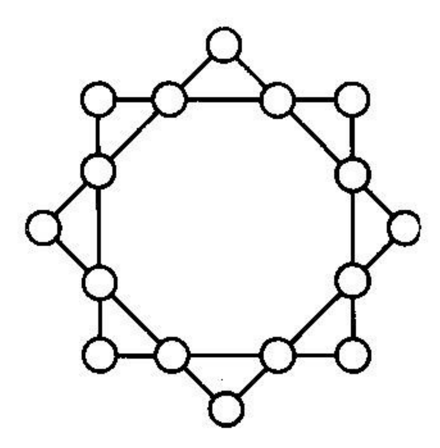
شكل ٩٢ . البيت الصيفى فى الغابة مقسم بواسطة ممرات

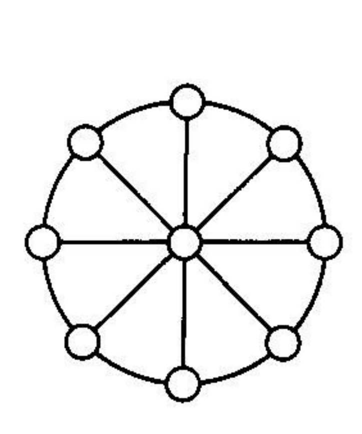
شكل ٩٣ . يلزم تقطيع قرص الساعة هذا الى ٦ اجزاء

وهدف المسألة هو اختبار مدى حضور بديهيتك اكثر من ان يكون اختبارا لفطنتك .

١٢٢ ــ النجمة ذات الرؤوس الثمانية . يلزم وضع الاعداد من ١ حتى ١٦ فى نقط تقاطع خطوط الشكل المبين على الشكل ٩٤ بحيث يكون مجموع الاعداد على كل ضلع من اضلاع المربع يساوى ٣٤ وان يكون مجموع الاعداد التى على رؤوس كل مربع ٣٤ ايضا .

١٢٣ ــ العجلة العددية . يلزم وضع الاعداد من ١ حتى ٩ بالوضع المبين على الشكل ٩٥ ، بحيث يكون احد الارقام فى وسط





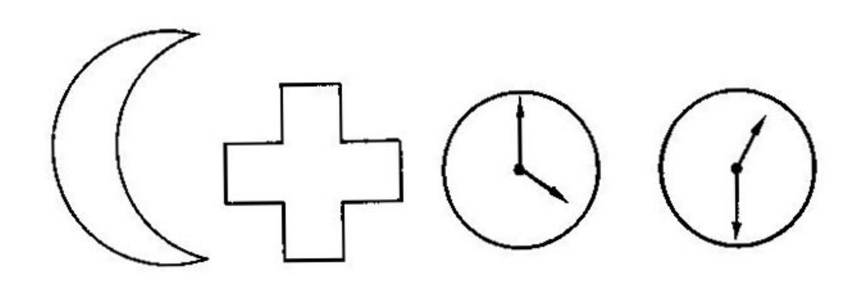
شكل ٩٤ . النجمة ذات الرؤوس الثمانية　　　شكل ٩٥ . العجلة العددية

الدائرة اما الارقام الاخرى فتكون فى نهاية كل قطر ، وبحيث يكون مجموع كل ثلاثة ارقام فى كل صف يساوى ١٥ .

١٢٤ ـ المنضدة ذات الارجل الثلاثة . يوجد رأى مفاده ان المنضدة ذات الارجل الثلاثة لا تتأرجح ابدا حتى لو كانت الارجل غير متساوية الطول . أصحيح هذا ام لا ؟

١٢٥ ـ اى الزوايا ؟ اى الزوايا تتكون ما بين عقارب الساعة على الشكل ٩٦ ؟ يجب الاجابة تبعا للادراك ، وبدون استخدام المنقلة .

١٢٦ ـ على خط الاستواء . لو اننا استطعنا ان نمشى حول الكرة الارضية على خط الاستواء ، فان قمة رأسنا سترسم طريقا اطول من اى نقطة من نقط اقدامنا .



شكل ٩٦ . ما هى قيمة الزوايا التى يصنعها عقربا الساعة

شكل ٩٧ . كيف يمكن تحويل الهلال الى صليب

ما مقدار هذا الفرق ؟

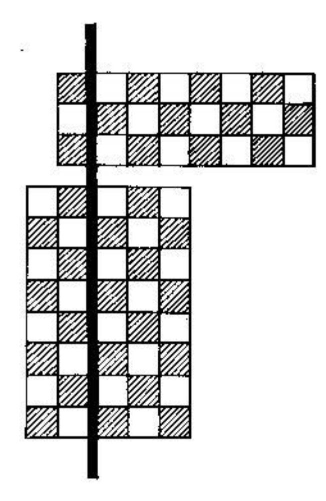
١٢٧ – فى ستة صفوف . ربما تعرف القصة الهزلية التى تدور حول تسعة جياد وضعت فى عشرة مرابط فاصبح فى كل مربط جواد . المسألة التى سنقدمها الآن شبيهة بهذه الفكاهة المشهورة ، ولكن لها حل واقعى جدا وليس خياليا . وهى كالآتى :

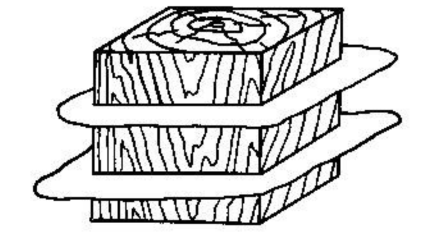
رتب ٢٤ شخصا فى ٦ صفوف بحيث يكون فى كل صف ٥ اشخاص .

١٢٨ – الصليب والهلال . مبين على الشكل ٩٧ شكل هلال (اذا ما توخينا الدقة فى التعبير فهذا ليس هلالا اذ ان شكل الهلال هو نصف دائرة اما هذا فبشكل منجل) متكون من قوسى دائرتين . المطلوب رسم اشارة الصليب الاحمر الذى تكون مساحتة هندسيا مساوية تماما لمساحة الهلال .

١٢٩ ـ مقطع المكعب . يوجد لديك مكعب طول ضلعه ٣ سم . وحجمه ٢٧ سم٣ . ويمكن قطع هذا المكعب الى ٢٧ مكعبا صغيرا طول ضلع كل منها يساوى ١ سم . من السهل جدا القيام بذلك بقطع المكعب بواسطة ستة مستويات : يلزم توصيل مستويين موازيين لاحد الجوانب ، واثنين موازيين للجانب الآخر ، ومستويين موازيين للجانب الثالث . لكن تصور انه بعد كل قطع يسمح لك بتحريك الاجزاء فى الفراغ : بقطع جزء معين تستطيع ان تضعه على الاجزاء الاخرى بحيث يتقاطع المستوى القاطع التالى معها جميعا . الا تستطيع ، باستخدام هذه الامكانية الاضافية الهامة ، تقليل عدد المستويات القاطعة التى تقسم المكعب الى ٢٧ مكعبا صغيرا ؟

١٣٠ ـ قطع آخر . المسألة التالية شبيهة بالسابقة ولكن فى شكل آخر . المطلوب تقطيع لوحة الشطرنج العادية المتكونة من ٦٤ مربعا (٨ × ٨) الى مربعات منفصلة . مع العلم انه لا يسمح باجراء القطع الا بخطوط مستقيمة فقط . ولكن بعد كل قطع يمكن ان توضع فى مكان آخر الاجزاء المتكونة لكى يقطع القطع المستقيم التالى لا جزءا واحدا وانما عدة اجزاء . كم عدد القطعات المستقيمة الواجب القيام بها لقطع كل اللوحة الى مربعات منفصلة ؟





شكل ٩٨ . المطلوب توصيل مستويين موازيين لاحد الجوانب

شكل ٩٩ . قبل عمل القطع التالى يمكن تغيير وضع الاجزاء المتكونة

حل الالغاز ١٠١ ـ ١٣٠

١٠١ ـ يمكن القيام بالعمل المطلوب بفتح ثلاث حلقات فقط . من اجل ذلك يلزم فك حلقات احد الاجزاء وتوصل بها نهايات الاجزاء الاربعة المتبقية .

١٠٢ ـ لحل هذه المسألة يلزم قبل كل شيء تذكر كم عدد الارجل لدى كل من الخنفس والعنكبوت : للخنفس ٦ ارجل ، وللعنكبوت ٨ ارجل .

بمعرفة ذلك ، نفترض انه كانت فى العلبة خنافس فقط عددها ثمانية . عندئذ يكون عدد الارجل ٦ × ٨ = ٤٨ اقل بـ ٦ مما هو معطى فى المسألة . ولنستبدل الآن احد الخنافس بعنكبوت . بذلك يزداد عدد الارجل بمقدار ٢ لان للعنكبوت ٦ ارجل وليس ٨ . من الواضح انه لو اجرينا ثلاثة من مثل هذه التغييرات فسنوصل العدد الكلى للارجل فى العلبة الى العدد المطلوب ٥٤ . ولكن عندئذ يبقى من الـ ٨ خنافس ٥ فقط اما الاخرى فستكون عناكب .

وهكذا فقد كان فى العلبة ٥ خنافس و ٣ عناكب .

لنختبر ذلك : يوجد لدى ٥ خنافس ٣٠ رجلا ، ولدى ٣ عناكب ٢٤ رجلا والعدد الكلى هو ٣٠ + ٢٤ = ٥٤ ، وهو المطلوب فى شروط المسألة .

ويمكن حل المسألة بطريقة اخرى . وهو انه يمكن الافتراض بوجود عناكب فقط فى العلبة وعددها ٨ عناكب . عندئذ يكون عدد كل الارجل ٨ × ٨ = ٦٤ . اى اكثر بـ ١٠ ارجل مما هو مذكور فى المسألة . وباستبدال خنفس باحد العناكب يقل عند ذاك عدد الارجل بمقدار ٢ . ينبغى اجراء ٥ تغييرات من مثل هذه التغييرات لكى يصل عدد الارجل الى العدد المطلوب اى ٥٤ . بتعبير آخر من مجموع ٨ عناكب يجب ابقاء ٣ فقط والباقى يستبدل بخنافس .

<u>١٠٣</u> — اذا ما تم شراء زوجين من الجرامق بدلا من معطف

المطر والقبعة والجرموق فقط لوجب ان لا يدفع مبلغ ٢٠ روبلا وانما اقل من ذلك بمقدار ما لان الجرموق ارخص من معطف المطر والقبعة ، اى بمقدار ١٦ روبلا . وبالتالى سنعرف ان ثمن زوجى الجرامق يساوى ٢٠ — ١٦ = ٤ روبلات ، اذن يكون سعر الزوج الواحد — روبلان .

والآن اصبح من المعروف ان ثمن معطف المطر والقبعة معا هو ٢٠ — ٢ = ١٨ روبلا ، علما ان معطف المطر اغلى من القبعة بمقدار ٩ روبلات . وباتباع نفس الاسلوب السابق فى التفكير ، فنقول : لنشترى قبعتين بدلا من معطف المطر مع القبعة . عندئذ سندفع لا ١٨ روبلا بل اقل من هذا المبلغ بمقدار ٩ روبلات . وهذا يعنى ان ثمن القبعتين ١٨ — ٩ = ٩ روبلات ، اذن يكون ثمن القبعة الواحدة — ٤ روبلات و ٥٠ كوبيكا .

اذن يكون ثمن الحاجيات كالآتى : الجرموق — روبلين ، القبعة — ٤ روبلات و ٥٠ كوبيكا ومعطف المطر — ١٣ روبلا و ٥٠ كوبيكا .

١٠٤ — لقد قصد البائع السلة ذات الـ ٢٩ بيضة . ولقد كان بيض الدجاج فى السلال ذات العلامات ٢٣ ، ١٢ و ٥ ، اما بيض البط — فكان فى السلال ذات العددين ١٤ و ٦ .

لنختبر ذلك . بقى من بيض الدجاج :

٢٣ + ١٢ + ٥ = ٤٠

ومن بيض البط :

$$14 + 6 = 20$$

اى ان بيض الدجاج اكثر بمرتين من بيض البط وهو ما تتطلبه شروط المسألة .

١٠٥ – ليس هناك ما يتطلب التفسير فى هذه المسألة : فالطائرة تقوم بالتحليق فى كلا الاتجاهين فى وقت واحد لان ٨٠ دقيقة = ساعة واحدة و ٢٠ دقيقة .

وهذه المسألة موضوعة للقارئ غير المنتبه الذى يمكن ان يفكر انه يوجد فرق ما بين ساعة واحدة و ٢٠ دقيقة و ٨٠ دقيقة . والطريف فى الامر فقد تبين ان عدد الافراد الذين يقعون فى هذا الشرك غير قليل ، علما ان اغلبهم من الناس الذين تعودوا على اجراء الحسابات وليس من ذوى الخبرة القليلة فى الحساب . ويكمن السبب فى هذا اعتيادهم على النظام العشرى للقياس والوحدات النقدية . فهم ما ان يرون العلامة «ساعة واحدة و ٢٠ دقيقة» وبجانبها «٨٠ دقيقة» فانهم يعتبرون بلا قصد ان الفرق بينهما كالفرق ما بين روبل واحد و ٢٠ كوبيكا و ٨٠ كوبيكا . وتقوم هذه المسألة على استغلال هذا الخطأ السيكولوجى .

١٠٦ – يكمن سر اللغز فى ان احد الآباء هو ابن للآخر . فلقد كان مجموع الاشخاص ثلاثة وليس اربعة : الجد والابن والحفيد . فاعطى الجد لابنه ١٥٠ روبلا وهذا اعطى منها ١٠٠ روبل

للحفيد (اى الى ابنه) مزيدا رأسماله بالتالى بمقدار ٥٠ روبلا فقط .

١٠٧ – يمكن وضع قطعة الداما الاولى على اى مربع من الـ ٦٤ مربعا اى بـ ٦٤ طريقة . وبعد ان وضعت القطعة الاولى يمكن ان نضع قطعة الداما الثانية على اى مربع من ٦٣ المتبقية . اى انه يمكن ان نضم الى الـ ٦٤ وضعا لقطعة الداما الاولى الـ ٦٣ وضعا لقطعة الداما الثانية . ومن هنا يكون العدد الكلى للاوضاع المختلفة لقطعتى الداما على اللوحة

$$٦٤ \times ٦٣ = ٤٠٣٢$$

١٠٨ – ان اصغر عدد صحيح يمكن كتابته برقمين ليس ١٠ ، وهو ربما ما يعتقده كثير من القراء ، وانما الواحد معبرا عنه بالطريقة الآتية :–

$\frac{١}{١}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٣}{٣}$ ، $\frac{٤}{٤}$ ... الخ حتى $\frac{٩}{٩}$

ويستطيع من له المام بالجبر ان يضيف الى هذه الصيغة صيغا اخرى :

$١^{٠}$ ، $٢^{٠}$ ، $٣^{٠}$ ، $٤^{٠}$ .. الخ حتى $٩^{٠}$

لان اى عدد اسه صفر يساوى الواحد الصحيح * .

---

* ولكن الحلين $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ او $\text{صفر}^{\text{صفر}}$ غير صحيحين لان مثل هذه الصيغ لا معنى لها عموما .

<u>١٠٩</u> – يلزم ان نضع الواحد الصحيح كمجموع كسرين :

$$١ = \frac{٣٥}{٧٠} + \frac{١٤٨}{٢٩٦}$$

ويستطيع من له المام بالجبر ايراد اجابات اخرى :

$${}^{١-٨-٩}٢٣٤٥٦٧ \quad ، \quad {}^{٠}١٢٣٤٥٦٧٨٩$$

وهكذا ، حيث ان اى عدد اسه صفر يساوى الواحد الصحيح .

<u>١١٠</u> – الطريقتان هما كالآتى :

$$١٠ = ٩ \frac{٩٩}{٩٩}$$

$$١٠ = \frac{٩}{٩} - \frac{٩٩}{٩}$$

ويستطيع من يعرف الجبر ان يضيف عدة حلول اخرى ، مثلا :

$$١٠ = {}^{\frac{٩}{٩}}\left(٩ \frac{٩}{٩}\right)$$

$$١٠ = {}^{٩-٩}٩٩ + ٩$$

<u>١١١</u> – الحلول الاربعة هى :

$$١٠٠ = ٥ \frac{٣}{٦} + ٢٤ \frac{٩}{١٨} + ٧٠$$

$$١٠٠ = ١٩\frac{٣}{٦} + ٨٠\frac{٢٧}{٥٤}$$

$$١٠٠ = ٣\frac{١٢}{٦٠} + ٩\frac{٤}{٥} + ٨٧$$

$$١٠٠ = ٤٩\frac{٣٨}{٧٦} + ٥٠\frac{١}{٢}$$

١١٢ – يمكن التعبير عن العدد ١٠٠ بخمسة ارقام متساوية ، وذلك باستخدام الواحد والثلاثة واسهلها جميعا استخدام الخمسة .

$$١٠٠ = ١١١ - ١١$$

$$١٠٠ = ٣٣ \times ٣ + \frac{٣}{٣}$$

$$١٠٠ = ٥ \times ٥ \times ٥ - ٥ \times ٥$$

$$١٠٠ = (٥ + ٥ + ٥ + ٥) \times ٥$$

١١٣ – غالبا ما يجاب على السؤال : ١١١١ . ولكن يمكن كتابة العدد بقدر اكبر بعدة مرات ، وهو بالذات ١١ أس ١١ اى $١١^{١١}$. ولو تحليت بالصبر للقيام بالحساب حتى النهاية (يمكن بواسطة اللوغاريتمات اجراء مثل هذه الحسابات بشكل أسرع بكثير) لاقتنعت من ان هذا العدد اكبر من ٢٨٠ مليارا . وبالتالى فهو يزيد على العدد ١١١١ بـ ٢٥٠ مليون مرة .

١١٤ – يمكن لمثال القسمة المعطى ان يقابل اربع حالات مختلفة ، هى :

١٣٣٧١٧٤ ÷ ٩٤٣ = ١٤١٨

١٣٤٣٧٨٤ ÷ ٩٤٩ = ١٤١٦

١٢٠٠٤٧٤ ÷ ٨٤٦ = ١٤١٩

١٢٠٢٤٦٤ ÷ ٨٤٨ = ١٤١٨

١١٥ – ان هذا المثال يقابل حالة واحدة للقسمة :

٧٣٧٥ ٤٢٨ ٤١٣ ÷ ١٢٥ ٤٧٣ = ٥٨٧٨١

نشرت كلتا المسألتين الاخيرتين الصعبتين لاول مرة فى الصحيفتين الامريكيتين « الجريدة الرياضية » فى عام ١٩٢٠ ، و « العالم المدرسى » فى عام ١٩٠٦ .

١١٦ – يوجد فى المتر المربع الف الف من المليمترات المربعة . كل الف مربع مليمترى موضوعة بجانب بعضها تكون ١م ، اما الالف الف منها فتكون ١٠٠٠ م اى ١ كم ، اذن سيمتد الشريط لمسافة كيلومتر كامل .

١١٧ – الاجابة مذهلة فى غرابتها : كان العمود سيرتفع الى مسافة ١٠٠٠ كم .

ولنجرى حسابا شفويا . يوجد فى المتر المكعب الف × الف × الف مليمترات مكعبة . وكل الف مكعب مليمترى موضع الواحد فوق الآخر يؤلف عمودا ارتفاعه ١٠٠٠م = ١ كم . وبما انه توجد لدينا مكعبات اكثر بالف مرة ، فسيكون ارتفاعها ١٠٠٠ كم .

١١٨ – يتضح من الشكل ١٠٠ ان (نتيجة لتساوى الزاويتين ١ و ٢) المقاييس الخطية للشيء تتناسب مع المقاييس المناظرة لها فى الصورة كنسبة مسافة الشيء عن العدسة الى ارتفاع آلة التصوير . وفى حالتنا المذكورة سنرمز لارتفاع الطائرة فوق الارض بالامتار بالرمز س . ويكون لدينا التناسب الآتى :

١٢٠٠٠ : ٨ = س : ٠,١٢

من هنا يكون س = ١٨٠ م .

١١٩ – يلزم ضرب ٨٩,٤ جم فى مليون اى فى الف الف .

ونقوم بعملية الضرب على دفعتين :

٨٩,٤ جم × ١٠٠٠ = ٨٩,٤ كجم ، لان الكيلوجرام اكبر بالف مرة من الجرام . ثم ٨٩,٤ كجم × ١٠٠٠ = ٨٩,٤ طن ، لان الطن اكبر بالف مرة من الكيلوجرام .

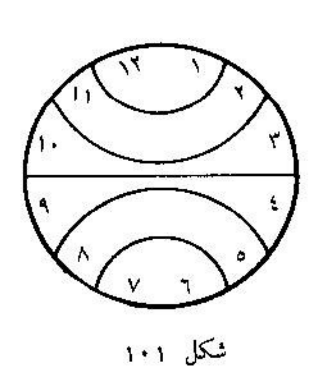
وهكذا فالوزن المطلوب هو : ٨٩,٤ طن.

١٢٠ – يمكن ان يصل عدد كل الطرق خلال الممرات من ا الى ب الى ٧٠ طريقا



شكل ١٠٠

(ممكن حل هذه المسألة بصورة منهجية بواسطة نظرية التراكيب التى تدرس فى مقرر الجبر) .



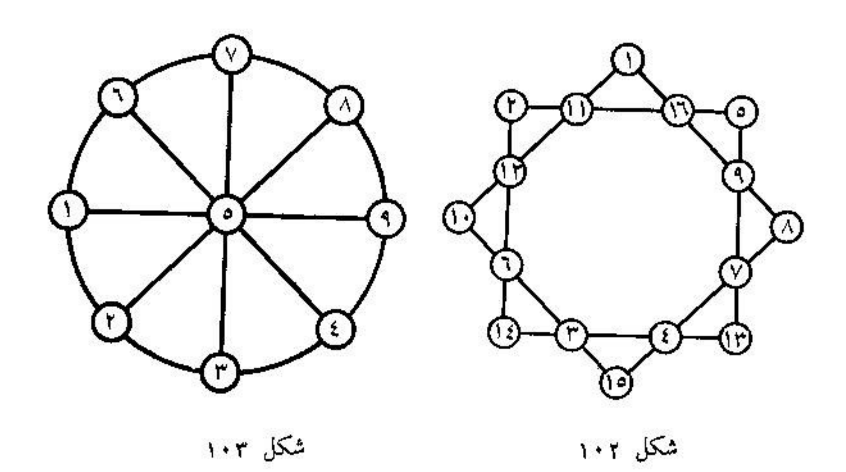
شكل ١٠١

١٢١ – بما ان مجموع كل الاعداد مبين على قرص الساعة ويساوى ٧٨ ، فان اعداد كل من القطاعات الستة يجب ان تساوى معا ٧٨÷٦ ، اى ١٣ . هذا يسهل عملية البحث عن الحل المبين على الشكل ١٠١ .

١٢٢ و ١٢٣ – الحل موضح على الشكلين ١٠٢ و ١٠٣ .

١٢٤ – يمكن للمنضدة ذات الثلاث ارجل ان تمس الارض دائما بنهايات ارجلها الثلاث ، لانه لا يمكن ان يمر خلال كل ثلاث نقط فى الفراغ سوى مستو واحد فقط ، وهذا هو السبب فى ان المنضدة ذات الثلاث ارجل لا تتارجح . وكما ترى فالمسألة هندسية بحتة وليست فزيائية .

من اجل ذلك من المستحسن استخدام الثلاث ارجل لادوات قياس الارض ولاجهزة التصوير . الرجل الرابعة لم تكن لتجعل الحامل اكثر استقرارا ، على العكس ، اذ وجب فى كل مرة ان نهتم بالا يتارجح الحامل .



شكل ١٠٣ شكل ١٠٢

١٢٥ — من السهل الاجابة على سؤال المسألة لو عرفنا الوقت الذى تشير اليه العقارب . فى الدائرة اليسرى (شكل ٩٦) تشير العقارب الى الساعة ٧ . وهذا يعنى انه يمتد ما بين هذه العقارب قوس يبلغ طوله $\frac{٥}{١٢}$ من كل المحيط .

ويكون هذا بمقياس الزوايا :

$$°١٥٠ = \frac{٥}{١٢} \times °٣٦٠$$

وتشير العقارب فى الدائرة اليمنى ، وادراك ذلك امر سهل ، الى الساعة ٩ و ٣٠ دقيقة . ويبلغ طول القوس ما بين طرفيهما $٣\frac{١}{٢}$ جزء من $\frac{١}{١٢}$ من كل المحيط او $\frac{٧}{٢٤}$.

ويكون ذلك بمقياس الزوايا :

$$٣٦٠° \times \frac{٧}{٢٤} = ١٠٥°$$

١٢٦ – باعتبار ان طول الانسان ١٧٥ سم وبالرمز لنصف قطر الارض بالرمز نق ، يكون لدينا :

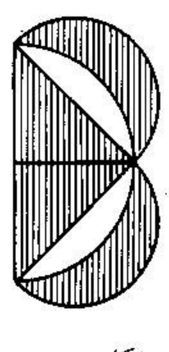
٢ × ٣,١٤ × (نق + ١٧٥) – ٢ × ٣,١٤ × نق = ٢ × ٣,١٤ × ١٧٥ = ١١٠٠ سم

اى ما يقرب من ١١ مترا . ومن العجيب هنا ان النتيجة لا تعتمد تماما على نصف قطر الكرة ، وبالتالى فهى واحدة على الشمس العملاقة والكرة الصغيرة .

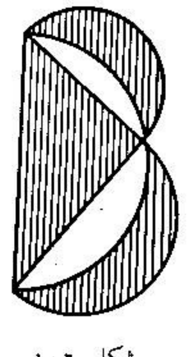
١٢٧ – من السهل تحقيق المطلوب فى المسألة اذا ما رتبنا الافراد فى شكل سداسى الاضلاع ، كما هو موضح على الشكل ١٠٤ .

١٢٨ – ان القراء الذين سمعوا بان المسألة الخاصة بتربيع الدائرة غير قابلة للحل سيظنون ان هذه المسألة لا تحل هندسيا . فبما انه لا يمكن تحويل الدائرة الكاملة الى مربع متساوى القياس فانه لا يجوز – كما يعتقد الكثيرون –

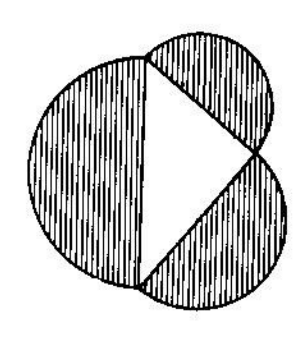
شكل ١٠٤



شكل ١٠٧



شكل ١٠٦



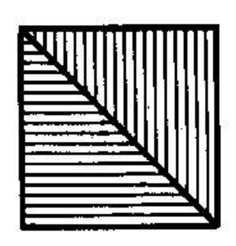
شكل ١٠٥

تحويل التجويف المتكون من قوسى الدائرة الى شكل قائم الزاوية .

غير انه يمكن حل المسألة ، بلاريب ، بواسطة البناء الهندسى لو استخدمنا احدى النتائج الطريفة لنظرية فيثاغورس الشهيرة . والنتيجة التى اعنيها تنص على ان مجموع مساحات انصاف الدوائر المقامة على الاضلاع القائمة فى المثلث القائم الزاوية تساوى نصف الدائرة المقامة على الوتر (شكل ١٠٥) وبقلب نصف الدائرة الكبيرة الى الناحية الاخرى (شكل ١٠٦) نرى ان التجويفين المنقطين معا متساويان فى القياس مع المثلث* . واذا ما اخذنا المثلث متساوى الساقين فان كل تجويف على حدة سيكون مساويا لنصف هذا المثلث (شكل ١٠٧) .

---

* تعرف هذه الحالة فى الهندسة باسم « نظرية التجاويف الهيبوقراطية » .



شكل ١٠٨

من هنا ينتج انه يمكن هندسيا وبدقة رسم مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية بحيث تكون مساحته مساوية لمساحة المنجل .

وبما ان المثلث متساوى الساقين والقائم الزاوية يتحول الى مربع يساويه فى الابعاد (شكل ١٠٨) فانه يمكن احلال مربع متساوى الابعاد محل المنجل بواسطة تركيب (بناء) هندسى بحت .

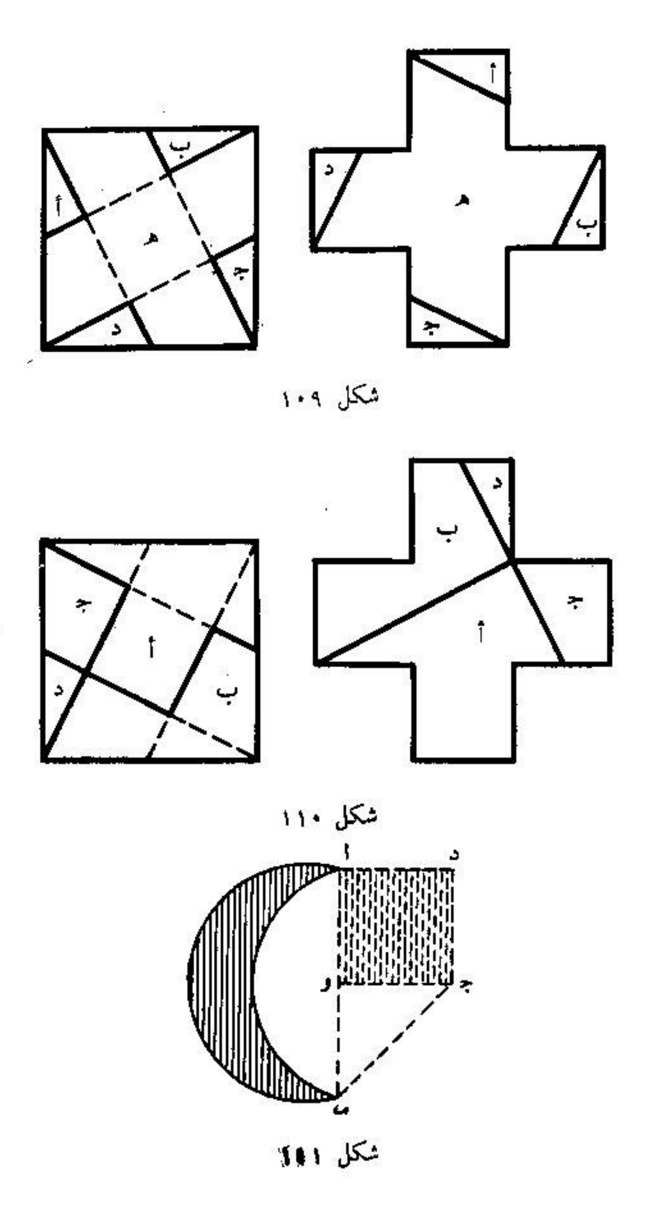
ويتبقى فقط تحويل هذا المربع الى شكل متساوى الابعاد على هيئة الصليب الاحمر (ويتالف كما هو معروف من خمسة مربعات متساوية موضوعة الواحد بجانب الآخر) .

وتوجد عدة طرق للقيام بذلك منها الطريقتان المبينتان على الشكلين ١٠٩ و ١١٠ ، وكلا التركيبين يبدان بتوصيل رؤوس المربع الى منتصف الاضلاع المقابلة .

ملاحظة هامة : يمكن ان يحول الى صليب متساوى الابعاد فقط شكل المنجل المتكون من قوسى دائرتين : قوس نصف الدائرة الخارجية وربع الدائرة الداخلية التى ينطبق قطرها على القطر الاكبر * .

---

* ان الهلال الذى نراه فى السماء يكون بشكل اخر بعض الشيء : فقوسه الخارجي – نصف دائرة اما القوس الداخلى فنصف قطع ناقص . وغالبا ما يصوره الفنانون خطأ بشكل قوسى دائرتين .



شكل ١٠٩

شكل ١١٠

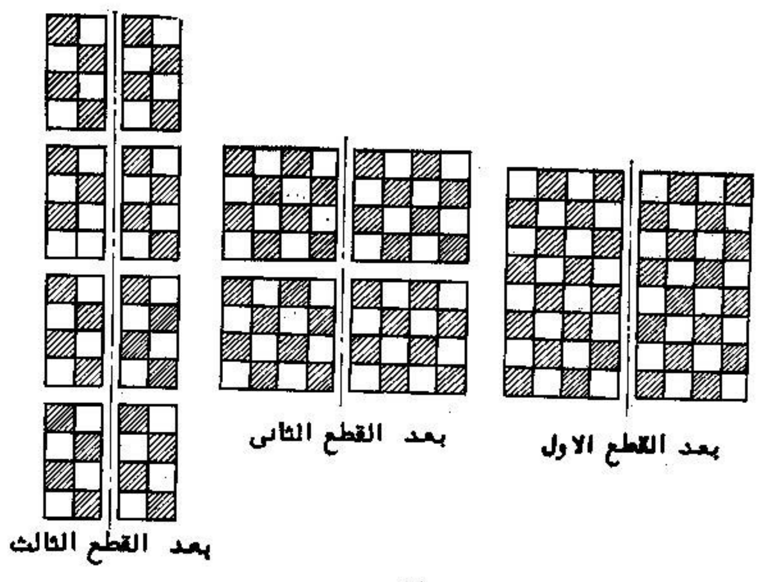
شكل ١١١

والآن اليك طريقة بناء الصليب المتساوى الابعاد مع المنجل .

نصل الطرفين ا ، ب للهلال (شكل ١١١) بمستقيم ، ومن منتصف هذا المستقيم و يقام عمود ، بحيث يكون و ج = و ا . ويكمل المثلث المتساوى الساقين و ا ج الى مربع و ا د ج ويجرى تحويله الى صليب بطريقة من الطرق المبينة على الشكلين ١٠٩ و ١١٠ .

١٢٩ — ان الامكانية الاضافية المذكورة لا تسهل المسألة : فرغم ذلك يتطلب الامر وجود ستة مستويات قاطعة . وفعلا فان للمكعب الداخلى من عدد المكعبات ال ٢٧ ، التى يراد ان يقطع اليها المكعب الكبير ، ستة وجوه ولا يستطيع اى مستوى قاطع ان يفتح جانبين من هذا المكعب الداخلى مرة واحدة مهما غيرنا من وضع الاجزاء .

١٣٠ — لننظر اولا ما هو اقل عدد من القطعات . فاذا ما اجرينا قطعا واحدا عندئذ تنقسم اللوحة الى قسمين . وعند القطع الثانى ، اذا ما قطع كل منهما ، سنحصل على ٤ اقسام . واذا ما وضعناها بحيث يقطع القطع الثالث كل الاقسام الاربعة ، فان عدد الاقسام يتضاعف مرة اخرى . وبعد القطع الثالث سنحصل على ٨ اقسام . وبعد القطع الرابع نحصل على ١٦ قسما (اذا كان القطع يقسم كل الاجزاء التى يحصل عليها قبل ذلك) بعد القطع الخامس — ٣٢ قسما . وهذا يعنى اننا بعد خمسة قطعات لا يمكن ان نحصل على ٦٤ مربعا منفصلا . وفقط بعد القطع السادس عندما



شكل ١١٢

يتضاعف عدد الاقسام مرة اخرى نستطيع ان نحصل على ٦٤ مربعا منفصلا . وهذا يعنى انه لا يمكن ان نكتفى باقل من ستة قطعات .

والآن يلزم تبيان انه يمكن اجراء ستة قطعات فعلا بحيث يتضاعف كل مرة عدد الاقسام وفى النهاية نحصل على $٢^٦$ = ٦٤ مربعا منفصلا . وليس من الصعب اجراء ذلك الآن : وينبغى فقط ان نراعى ان تكون الاقسام بعد كل قطع متساوية ، وان يقسم القطع التالى كل من الاجزاء الى نصفين . وتظهر على الشكل ١١٢ القطعات الثلاثة الاولى .

يعتبر كتاب ياكوف بيريلمان " الرياضيات المسلية " من اكثر كتبه بساطة من سلسلة مؤلفاته المشهورة والمكرسة لموضوعات الرياضيات المسلية • وقد جمعت فى هذا الكتاب الغاز رياضية صيغ الكثير منها على شكل قصص قصيرة • ويكفى لحل هذه الالغاز التعرف على الحساب الاولى وابسط المعلومات الهندسية • وهناك جزء بسيط فقط من المسائل يتطلب المقدرة على وضع وحل ابسط المعادلات • وبغض النظر عن كون هذا الكتاب مخصصا لتلاميذ المدارس الثانوية ، الا انه يمكن ان يعم بالفائدة لكل من يهوى التسلية المفيدة اثناء وقت الفراغ والراحة •